高级计量经济学

理论经济学博士课程 2023-2024

Lecture 9: Nonlinear Regression and GLS

Davidson, R. & MacKinnon, J. (2009). Econometrics Theory and Methods. Oxford University Press.

黄嘉平

工学博士 经济学博士
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

办公室 粤海校区汇文楼1510
E-mail huangjp@szu.edu.cn
Website https://huangjp.com

非线性回归模型和 MM估计量

线性模型与非线性模型
Linear and Nonlinear Models

线性回归模型可以表达为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X} \sim \mathrm{IID}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

或

$$y_t = \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta} + u_t, \quad u_t \mid \boldsymbol{X} \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2), \quad t = 1,\ldots,n$$

定义信息集（information set）Ω_t 为所有可能对 y_t 产生影响的变量的集合。一般情况下我们要求 Ω_t 中的变量为外生或者前定变量。

基于信息集 Ω_t，我们可以将线性模型拓展为下面的非线性模型

$$y_t = x_t(\boldsymbol{\beta}) + u_t, \quad u_t \mid \Omega_t \sim \mathrm{IID}(0,\sigma^2), \quad t = 1,\ldots,n$$

因此 $E[u_t \mid \Omega_t] = 0$

这里 $x_t(\boldsymbol{\beta})$ 是参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的非线性函数。非线性模型也可以写成

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \sim \mathrm{IID}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

注：$x_t(\boldsymbol{\beta})$ 也可以写成 $f(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{\beta})$。为了使符号和线性模型相对应，这里采用 $x_t(\boldsymbol{\beta})$ 的写法。

矩条件
Moment Conditions

在线性模型下，如果假设前定性 $E[u_t \mid \boldsymbol{X}_t] = 0$，我们可以推出 $E[\boldsymbol{X}_t^\top u_t] = \boldsymbol{0}$ （Lecture 5），而这恰好是求 MM 估计量的条件（Lecture 2）。此条件对应的样本条件是

$$\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$$

左式称为 moment conditions

在非线性模型下，我们可以从信息集 Ω_t 选择 k 个变量并写成 $1 \times k$ 向量 $\boldsymbol{W}_t$。此时可得 $E[u_t \mid \boldsymbol{W}_t] = 0$，因此 $E[\boldsymbol{W}_t^\top u_t] = \boldsymbol{0}$，对应的矩条件为

$$\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{W} \text{ 的第 } t \text{ 行是 } \boldsymbol{W}_t$$

非线性模型的矩条件中包含 k 个关于系数的非线性方程，其解（若存在）就是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 MM 估计量，可记作 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}$。

关于 MM 估计量

- MM 估计量是 $\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big)=\boldsymbol{0}$ 的解。因为条件是非线性的，我们无法获得解的一般表达式。

- 矩条件基于 $\boldsymbol{W}_t$ 的前定性 $E[u_t \mid \boldsymbol{W}_t]=0$ 而非外生性，因此 MM 估计量可能有偏。

- MM 估计量的性质会随 $\boldsymbol{W}$ 中变量的选择而变化。$\boldsymbol{W}$ 的选择一般不会影响 MM 估计量的一致性，但会影响它的渐进协方差矩阵。因此我们需要找到使 MM 估计量满足渐进有效性的 $\boldsymbol{W}$。

回归系数的渐进识别

Asymptotic Identification

识别（Identification）指在确定样本和估计方法后，可以求出唯一的参数值的情况。如果一种估计方法在 $n \to \infty$ 时可以求出唯一的参数值，我们称其为渐进可识别。

在线性模型的 OLS 估计中，如果 $\boldsymbol{X}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{\beta}$ 是可识别的（标准方程有唯一解）。在非线性模型的 MM 估计中，如果 $\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big) = \boldsymbol{0}$ 存在唯一解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 是可识别的。

MM 估计量的渐进可识别性取决于 $\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big)$ 的概率极限是否可以求出唯一的参数值。令

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}), \qquad \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) \text{ 为确定性函数。}$$

已知 $\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}_0)\big) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{W}_t^\top u_t$，$E[\boldsymbol{W}_t^\top u_t] = \boldsymbol{0}$，根据 LLN 可得

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^\top\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta}_0)\big) = \boldsymbol{0}$$

因此，如果 $\boldsymbol{\beta}_0$ 是 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$ 的唯一解，MM 估计量是渐进可识别的。

需要注意的是，可识别性无法推出渐进可识别性，反之亦然（pp.217-218）。

MM 估计量的一致性

Consistency of MM Estimators

假设 MM 估计量是渐进可识别的，则

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\boldsymbol{W}^\top\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}})\right)=\boldsymbol{\alpha}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}})=\mathbf{0}$$

存在唯一解。如果我们假设 $\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}=\boldsymbol{\beta}_\infty$（非随机），则根据上式可得 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}_\infty)=\mathbf{0}$，但是渐进可识别性的定义告诉我们只有 $\boldsymbol{\beta}_0$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0}$，因此

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}=\boldsymbol{\beta}_0$$

即 MM 估计量满足一致性。

MM 估计量的渐进可识别性取决于如何选取 $\boldsymbol{W}$ 里的变量。

MM 估计量的其他渐进性质

Other Asymptotic Properties of MM Estimators

非线性模型的 MM 估计量还具有以下渐进性质：

- 渐进正态性：$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}} - \boldsymbol{\beta}_0)$ 服从均值为 $\mathbf{0}$ 的渐进正态分布（pp.220-222）
- 渐进有效性：$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}} - \boldsymbol{\beta}_0)$ 的渐进协方差矩阵是

$$\sigma_0^2 \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}_0^\top \boldsymbol{W}(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{X}_0\right)^{-1} = \sigma_0^2 \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}_0^\top \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{X}_0\right)^{-1}$$

其中 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}_0) = \left[\partial x_t(\boldsymbol{\beta}) \big/ \partial \beta_i\right]_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0}$。

当 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}_0$ 时，$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}} - \boldsymbol{\beta}_0)$ 在 MM 估计量当中最有效。（pp.222-223）

需要注意的是，$\boldsymbol{X}_0$ 是未知量 $\boldsymbol{\beta}_0$ 的函数，因此这样定义的有效估计量不可行（infeasible）。

线性模型与 MM 估计量

线性模型 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ 是非线形模型的一个特例，因此非线形模型的 MM 估计量也适用于线性模型。

在线性模型下，MM 估计量是

$$\boldsymbol{W}^{\top}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}\right) = \boldsymbol{0}$$

的解。根据定义 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}) = \left[\partial x_t(\boldsymbol{\beta}) \middle/ \partial \beta_i\right] = \boldsymbol{X}$，因此 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}$，最有效的 MM 估计量满足

$$\boldsymbol{X}^{\top}\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}}\right) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{MM}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$$

非线性最小二乘法
Nonlinear Least Squares

因为 $\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}_0) = \left[\partial x_t(\boldsymbol{\beta}) \big/ \partial \beta_i\right]_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0}$ 是未知参数 $\boldsymbol{\beta}_0$ 的函数，我们无法通过它求得最有效的 MM 估计量。

假设估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 是下面 MM 条件的解

$$\boldsymbol{X}^\top(\boldsymbol{\beta})\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big) = \mathbf{0}$$

同时我们也可以考虑非线形最小二乘法

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big)^\top \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\beta})\big)$$

上面的 MM 条件等价于非线性最小二乘法的一阶条件。因此，我们将 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 称为非线性最小二乘估计量（NLS），并记为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{NLS}}$。

当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{NLS}}$ 收敛于有效 MM 估计量（$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X}_0$）。

广义最小二乘法

线性模型与广义最小二乘法

OLS 和 NLS 估计量都需要误差项满足同方差性。下面我们放松这个假设，考虑线性模型

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}, \quad E[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top] = \boldsymbol{\Omega}$$

一般情况下 $\boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2 \boldsymbol{I}$，因此不满足 Gauss-Markov 定理的条件。

为了获得有效估计量，我们可以将原模型变换为满足条件的新模型，并将新模型的 OLS 估计量作为 $\boldsymbol{\beta}$ 的估计量。这种方法被称为广义最小二乘法（generalized least squares，GLS）。

广义最小二乘估计量

GLS Estimator

已知 $\boldsymbol{\Omega}$ 是正定矩阵且可逆，因此存在 $n \times n$ 非奇异矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 满足

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\top}$$

将回归方程 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ 从左侧乘以 $\boldsymbol{\Psi}^{\top}$ 可得 $\boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{u}$。

GLS 估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ 是变换后模型的 OLS 估计量，即

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = (\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}$$

变换后的误差项的协方差矩阵是

$$E[\boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\top}\boldsymbol{\Psi}] = \boldsymbol{\Psi}^{\top}E[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\top}]\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}^{\top}(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\top})^{-1}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$$

由此可得到 GLS 估计量的协方差矩阵

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = 1 \cdot (\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^{\top}\boldsymbol{X})^{-1} = (\boldsymbol{X}^{\top}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}$$

广义最小二乘法

变换后模型 $\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{u}$ 的 OLS 估计量是 SSR 最小化问题的解，该问题可以写成

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\beta}} \left(\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right)^\top \left(\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\right) \\
= &\min_{\boldsymbol{\beta}} \left(\boldsymbol{\Psi}^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right)^\top \left(\boldsymbol{\Psi}^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})\right) \\
= &\min_{\boldsymbol{\beta}} \ (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^\top (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) \\
= &\min_{\boldsymbol{\beta}} \ (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}
$$

我们将目标函数 $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$ 称为 GLS 准则函数（GLS criterion function）。

GLS 估计量是 MM 估计量

最小化问题 $\min_{\boldsymbol{\beta}} (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})$ 的一阶条件是

$$\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) = \boldsymbol{0}$$

因此，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ 也可以看作满足矩条件 $\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = \boldsymbol{0}$ 的 MM 估计量。一般情况下，矩条件 $\boldsymbol{W}^\top(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) = \boldsymbol{0}$ 的解可以写成

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{y}$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ 是 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}$ 时的 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}}$。

GLS 估计量的统计学性质

GLS 估计量的统计学性质类似于 MM 估计量的统计学性质。

- 当 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 外生时，即 $E[\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{X}, \boldsymbol{W}] = \mathbf{0}$ 时，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}}$ 非偏。
- 当 $\boldsymbol{W}$ 满足前定性，即 $E[u_t \mid W_t] = 0$ 时，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}}$ 满足一致性。
- $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}}$ 的协方差矩阵是

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}}) &= E\Big[(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}} - \boldsymbol{\beta}_0)(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{W}} - \boldsymbol{\beta}_0)^\top\Big] \\
&= E\Big[(\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{u}\boldsymbol{u} \boldsymbol{W}^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W})^{-1}\Big] \\
&= (\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{W}^\top (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{W})^{-1}
\end{aligned}
$$

已知，$\operatorname{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1}$，可以通过证明两者之差是半正定矩阵证明 GLS 估计量的有效性。

OLS 估计量也是 MM 估计量，因此 GLS 估计量至少和 OLS 估计量同样有效，且在大多数情况下比 OLS 估计量更有效。

GLS 估计量的计算

虽然 GLS 估计量有很好的性质，但是并不容易计算。

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{y}$，即使 $\boldsymbol{\Omega}$ 已知，我们需要求它的逆矩阵。当 n 很大时，$\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ 的计算需要占用大量的计算和储存资源（例如 $n = 10{,}000$ 时，储存 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ 需要 1600Mb 空间）。

如果 $\boldsymbol{\Psi}$ 已知，且我们可以将数据变换为 $\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}^\top \boldsymbol{X}$ 而不需要储存 $\boldsymbol{\Psi}$，就可以通过 OLS 估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$。

OLS 估计不需要用到误差项的方差，因此我们可以利用这一特性。如果 $\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2 \boldsymbol{\Delta}$，且 $\boldsymbol{\Delta}$ 为已知，则可以用 $\boldsymbol{\Delta}$ 替代 $\boldsymbol{\Omega}$ 求 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$。具体做法是找到满足 $\boldsymbol{\Delta}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Psi}^\top$ 的 $\boldsymbol{\Psi}$，并对原模型进行变换，再用变换后模型进行 OLS 估计，所获得的估计量就是原模型的 GLS 估计量：

$$(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1} \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}$$

这时 GLS 估计量的协方差矩阵可以写成 $\sigma^2 (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1}$。如果 σ^2 未知，我们依然要对其进行估计，即 $\widehat{\text{Var}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}) = s^2 (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\Delta}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1}$，$s^2$ 是变换后模型误差项的估计量。

加权最小二乘估计量

Weighted Least Square Estimator

如果误差项是异方差但是无自相关，那么就可以很容易地计算 GLS 估计量。这时的 $\mathbf{\Omega}$ 是对角矩阵，我们将其第 t 对角要素写为 ω_t^2，即 $\mathbf{\Omega} = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$，则可得

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \mathrm{diag}(\omega_1^{-2}, \ldots, \omega_n^{-2}),\ \mathbf{\Psi} = \mathrm{diag}(\omega_1^{-1}, \ldots, \omega_n^{-1})$$

变换后的模型可以写成

$$\omega_t^{-1} y_t = \omega_t^{-1} \boldsymbol{X}_t \boldsymbol{\beta} + \omega_t^{-1} u_t, \qquad t = 1, \ldots, n$$

通过对这个模型进行 OLS 估计得到的估计量被称为加权最小二乘估计量（WLS 估计量），因为这可以看作是用权重 ω_t^{-1} 给样本中第 t 观测值进行加权。

因为变换后模型的误差项 $\omega_t^{-1} u_t$ 满足同方差性，WLS 估计可以作为应对异方差性的一种方法。

如何决定 ω_t

WLS 估计的难点是如何决定 ω_t。这可以分为以下几种情况：

- 通过理论或者对样本数据的检验，我们相信 $E[u_t^2]$ 和某个可观测变量 z_t^2 成正比。此时可以用 z_t^{-1} 作为权重。
- 样本变量是针对不同大小的集合获得的统计数据。
  - 如果变量是集合中的均值，例如不同城市的人均可支配收入，则 u_t 的方差和集合的要素数 N_t 呈反比。此时可用 $N_t^{1/2}$ 作为权重。
  - 如果变量是总和而不是均值，则 u_t 的方差和 N_t 成正比，此时需用 $N_t^{-1/2}$ 作为权重。