博弈论与信息经济学

1. 不确定性下的理性决策

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

偏好和理性选择

生活中的个人决策问题

- 简单的决策
  - 早饭吃什么?
  - 下午上课要不要带伞?
  - 今天领到了1000元奖学金，晚上要不要出去庆祝一下?
- 复杂的决策
  - 导师要申请一个科研项目，让我起草申报书，我应该怎么办?
  - 三年后打算去美国读博士，我应该怎样计划这三年的学习生活?
  - 我的目标是在35岁实现财务自由，从现在起我应该怎么办?
    - 如何安排实习和科研？（相对确定的环境）
    - 要不要读博？毕业后选择哪个行业？中途是否需要转行？（伴随着不确定因素，如经济走势、科技发展等）
    - 结不结婚？要不要孩子？什么时候?

个人决策问题的基本组成要素

个人决策问题包含以下三个特征：

1. **行动（action）**：参与人（即决策者）可以选择的所有备选项，通常写作集合 A
2. **结果（outcome）**：每个行动带来的可能后果，通常写作集合 X
3. **偏好（preference）**：参与人对所有结果的排序，以偏好关系 $\succsim$ 表达

   偏好关系（preference relation）“$\succsim$”是一种二元关系，$x \succsim y$ 代表“x 不比 y 差”，或参与人“喜好 x 的程度不低于喜好 y 的程度”

- 在“早饭吃什么？”中，
  - 行动的集合包括各种早饭类型，例如 $A = \{$煎饼果子, 肠粉, 热干面, $\ldots\}$
  - 结果的集合是吃了每一种早饭，可以写成 $X = \{$吃煎饼果子, 吃肠粉, 吃热干面, $\ldots\}$，也可以具体到吃每一种早饭带来的饱腹感 $X' = \{0.8,\ 0.7,\ 0.9,\ \ldots\}$
  - 参与人对于结果的偏好可能是

    吃煎饼果子 $\succsim$ 吃肠粉，吃热干面 $\succsim$ 吃肠粉，吃煎饼果子 $\succsim$ 吃热干面，…

偏好关系

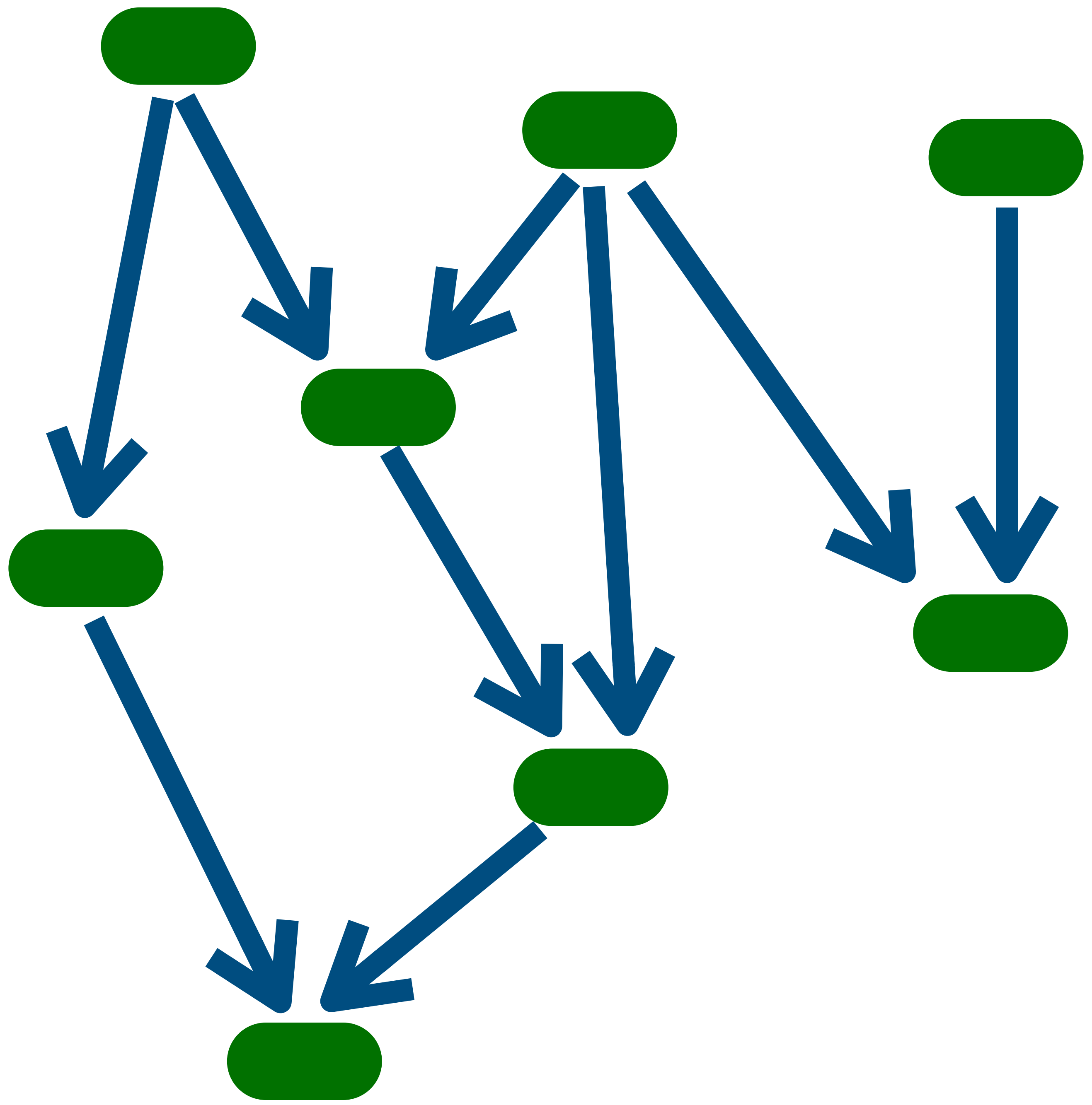
- 偏好关系 $\succsim$ 包含两层含义，即**严格偏好关系**（strict preference relation）和**无差异关系**（indifference relation）
  - 严格偏好关系 $\succ$ ： $x \succ y$ 代表“x 比 y 好”或“比起 y 我更喜欢 x”
  - 无差异关系 $\sim$ ： $x \sim y$ 代表“x 和 y 一样好”或“我对 x 和 y 的喜好程度一样”

我们熟悉的 $\geq$ 也是一种（数字间的）二元关系，可对比 $\succsim$ 和 $\geq$ 间的异同

- 满足下面两个公理的偏好关系称为**理性偏好关系**（rational preference relation）
  - **完备性公理**（the completeness axiom）： 偏好关系 $\succsim$ 是完备的，即任意两个结果 $x, y \in X$ 都可以用它进行排序（$x \succsim y$ 或 $y \succsim x$）
  - **传递性公理**（the transitivity axiom）： 偏好关系 $\succsim$ 是可传递的，即任意三个结果 $x, y, z \in X$，若 $x \succsim y, y \succsim z$，则 $x \succsim z$
- 我们只考虑具有理性偏好的参与人

完备性与传递性为什么重要

非完备关系的例子



非完备关系下，不能保证唯一的最优解

不可传递关系的例子

孔多塞悖论（Condorcet paradox）

小明：$A \succ C \succ B$
小刚：$C \succ B \succ A$
小红：$B \succ A \succ C$

三人合计：

两人支持 $A \succ C$
两人支持 $C \succ B$
两人支持 $B \succ A$

少数服从多数 + 可传递性
$\Rightarrow A \succ B, B \succ A$
集体决策失败

支付函数

- 当参与人都具有理性偏好时，我们可以将决策问题的结构简化
  - 我们已经了解了 $\succsim$ 和 $\geq$ 的相似性，即 $\geq$ 具备完备性和传递性
  - $\succsim$ 是结果间的比较（相对比较麻烦），而 $\geq$ 是实数间的比较（我们更熟悉，例如效用最大化、成本最小化等问题）

支付函数（payoff function）：考虑函数 $u: X \to \mathbb{R}$。如果对于任意 $x, y \in X$,

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{iff} \quad x \succsim y$$

则称 u 表达了偏好关系 $\succsim$

同一偏好关系可以对应不同的支付函数，因此支付函数的取值本身没有意义，取值间的大小比较才有意义

定理：如果结果的集合 X 是有限的，则 X 上的任意理性偏好关系都可以用一个支付函数表达

1. 因为 X 的要素有限，根据完备性和传递性，我们可以找到 X 中最不被喜好的要素集合 X_1，并给其要素赋值 u_1
2. 从 X 中剔除 X_1 后，重复上面的操作直至全部要素都被剔除
3. 这样我们就用 $u: X \to \{u_k \in \mathbb{R} \mid u_1 < u_2 < \cdots\}$ 表达了这个偏好关系

决策树

Decision tree

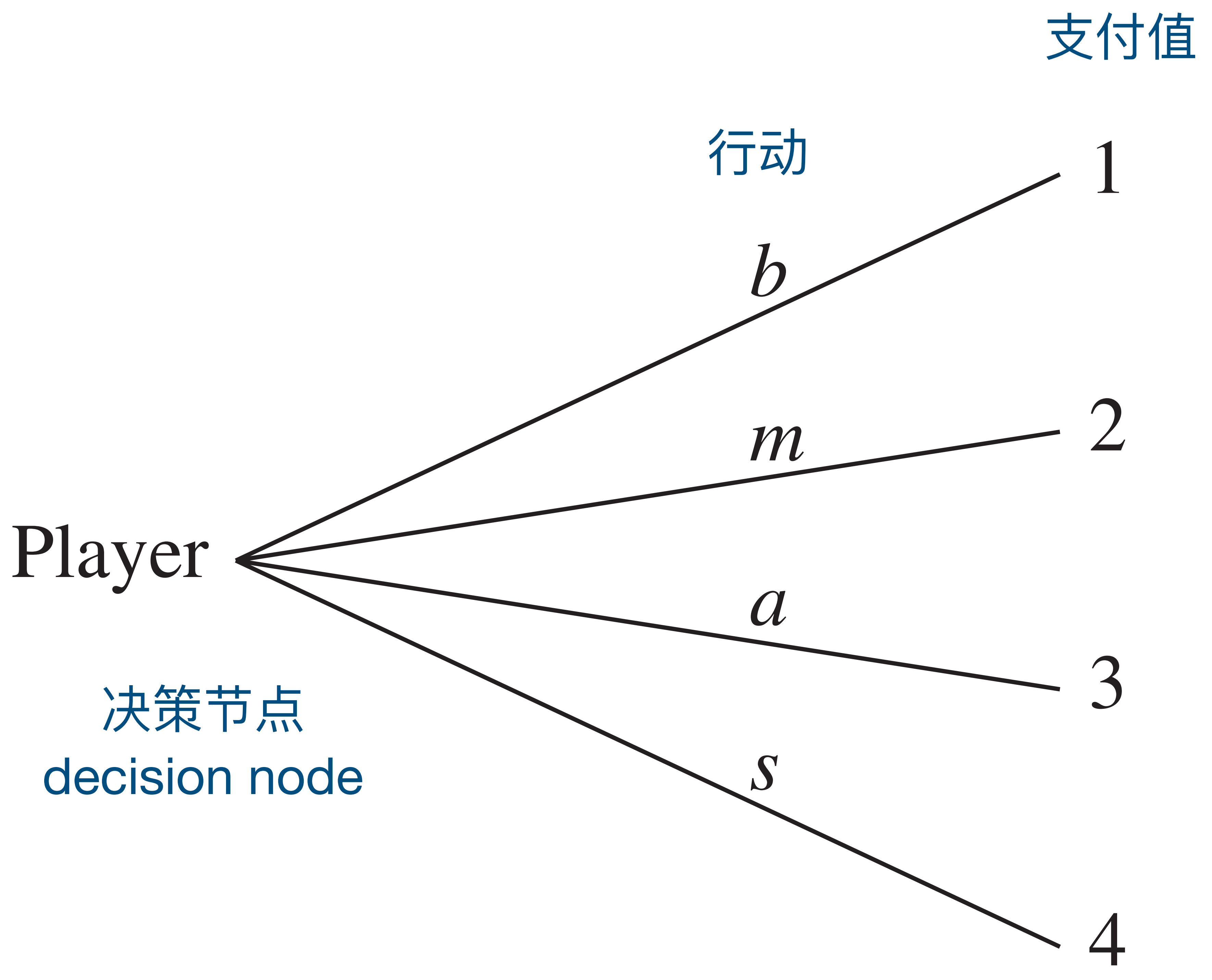


FIGURE 1.1 A simple breakfast decision tree.

理性选择

- 参与人基于<u>支付函数最大化</u>而选择<u>最优行动</u>的方式被称为**理性选择（rational choice）**

理性选择的假设：参与人充分理解决策问题的如下要素

- 所有可能的行动，即 A
- 所有可能的结果，即 X
- 每一种行动如何体现为结果的变化
- 自身对结果的理性偏好（即自身的支付函数）

- 参与人通过比较结果或其收益（支付函数的取值）选择最优<u>行动</u>，如果我们能直接从行动定义支付函数，决策问题会更加简单
- 如果存在函数 $x : A \to X$，则可以定义复合函数 $v = u \circ x$，将行动 a 的收益表达为 $v(a) = u(x(a))$。此时，基于 v 的最大化选择最优行动的参与人称为理性参与人

例题：水果和糖

- 一家小卖店以0.5元/根的价格出售香蕉，同时以0.25元/颗的价格出售糖
- 你可以将吃香蕉和糖带来的满足感换算成货币价值（即支付函数）
  - 吃第一根香蕉的收益是1.2元，此后每多吃一根，收益都是前一根的一半
  - 吃第一颗糖的收益是0.4元，此后每多吃一颗，收益都是前一颗的一半
- 从吃香蕉和吃糖获得的收益互不影响（没有外部性）

问题：

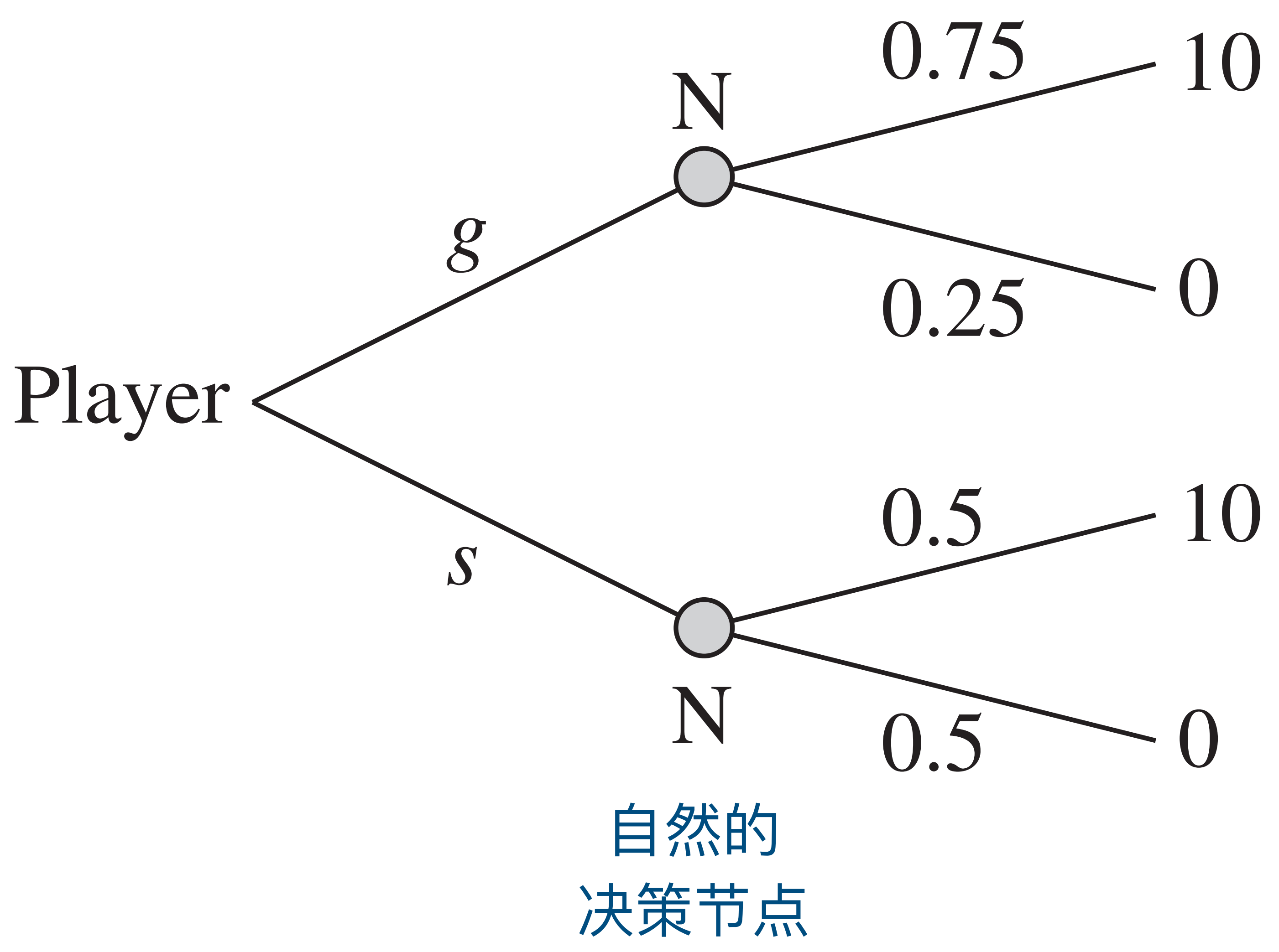
1. 假设你身上只有1.25元，你的行动集是什么？
2. 画出你的决策树
3. 你应当花掉所有的钱吗？

不确定性与时间

彩票

Lottery

- **彩票（lottery）是表达随机收益的一种方式**
  - 设想一个初创公司正面临着是否要扩大规模的决策，其行动集是 $A = \{g = \text{扩大}, s = \text{维持现状}\}$
  - 结果有两种，成功可以带来的利润为10，失败带来的利润为0，因此结果集是 $X = \{0,10\}$
  - 和以往不同的是，行动和结果之间没有确定的关系：如果选择 g，则成功的概率是0.75；如果选择 s，则成功的概率为0.5
  - 参与人实质上是在 g 和 s 两个彩票间进行选择
- 为了方便讨论，我们将彩票的结果当做另一个参与人**“自然”（Nature）**做出的决策



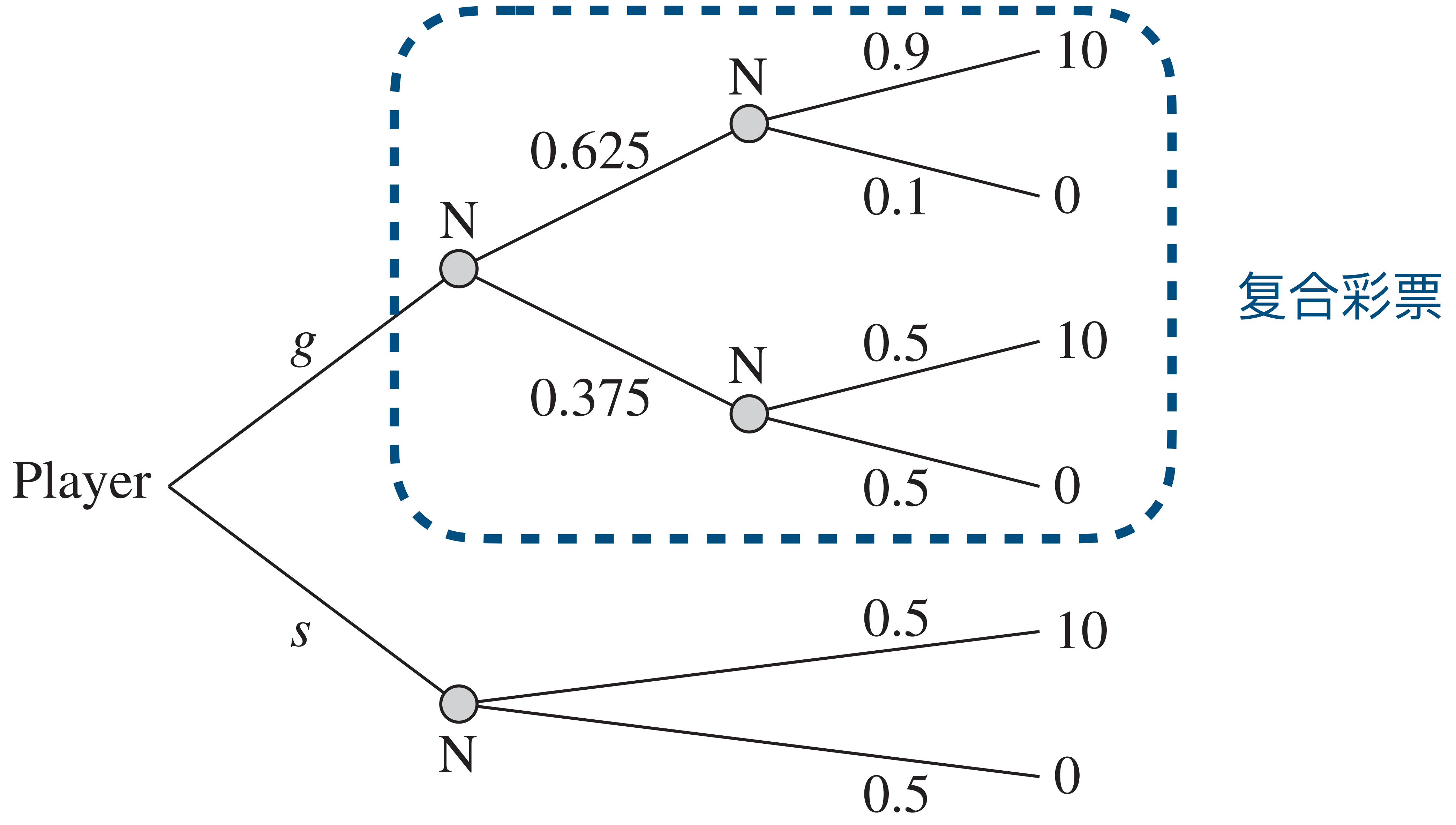
彩票

Lottery

结果集 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上的**简单彩票（simple lottery）**是一个概率分布 $p = \big(p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)\big)$，其中 $p(x_k) \geq 0$ 是 x_k 发生的概率

- 简单彩票是最终结果上的概率分布，然而，有时不确定性不只发生在最终结果上，也有可能发生在决策过程中，为了对应这种情况，我们将不同彩票上的概率分布（即彩票的彩票）称为**复合彩票（compound lottery）**
  - 假设初创公司扩大规模的结果分为两个层面：
    - 扩张本身是否成功：成功概率为0.625
    - 扩张后的经营是否成功：

      如果扩张成功，则经营成功的概率为0.9
      如果扩张失败，则经营成功的概率为0.5
- 连续结果集上的简单彩票是一个连续分布的累积分布函数（CDF）$F(x)$



随机结果的评价

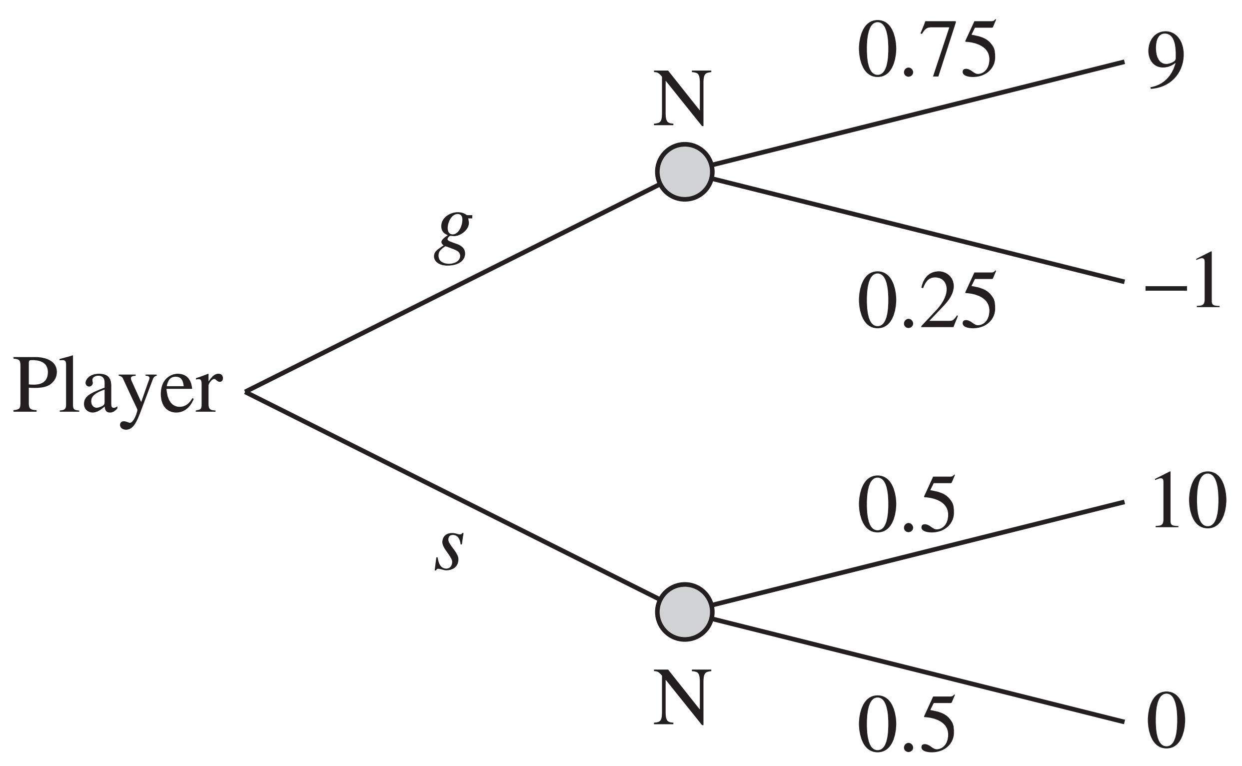
- 现在我们可以认为参与人对行为的选择实际上是在选择更好的彩票，而对彩票的评价应当基于收益的期望值

如果 $u(x)$ 是 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上的支付函数，$p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ 是 X 上的彩票，则 p 的期望收益是

$$E[u(x) \mid p] = \sum_{k=1}^{n} p_k \, u(x_k)$$

如果 X 是连续的，$F(x)$ 是 X 上的彩票，且其密度函数是 $f(x)$，则期望收益是 $E[u(x) \mid F] = \int_{x \in X} u(x) f(x) \, dx$

- 带有扩张成本的决策问题



$$v(g) = E[u(x) \mid g] = 0.75 \times 9 + 0.25 \times (-1) = 6.5$$

$$v(s) = E[u(x) \mid g] = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 0 = 5$$

风险态度

Risk attitude

- 当不存在不确定性时，参与人对具有相同收益的行动是无差异的
- 当存在不确定性时，相同的期望收益却有可能伴随着不同的风险程度，因此也影响参与人的选择
  - 考虑两个彩票 $p' = (\frac{7}{12}, 0, \frac{5}{12})$ 和 $p'' = (0, 1, 0)$，而收益是 $(4, 9, 16)$
  - $v(p') = \frac{7}{12} \times 4 + \frac{5}{12} \times 16 = 9$
  - $v(p'') = 1 \times 9 = 9$

你会选哪一个?

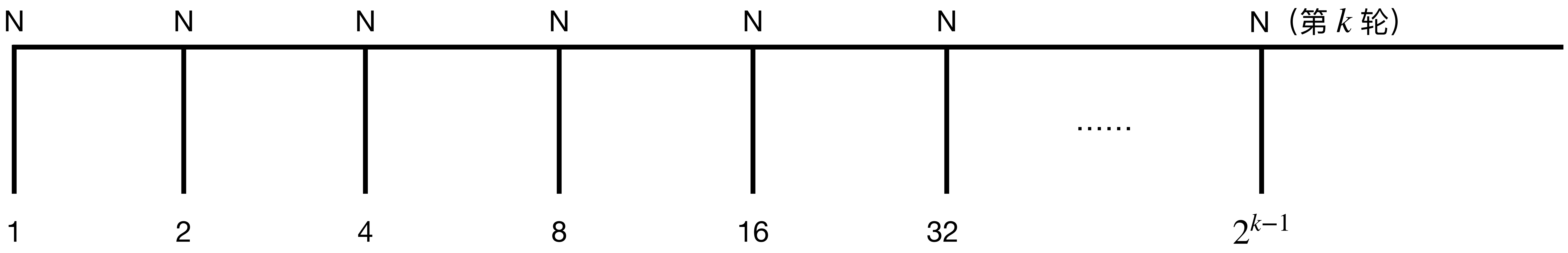
人们对确定性和不确定性的偏好称为风险态度（risk attitude）

- **风险回避（risk averse）**：如果期望收益相同，选择确定的彩票
- **风险爱好（risk loving/seeking）**：如果期望收益相同，选择不确定的彩票
- **风险中立（risk neutral）**：如果期望收益相同，认为确定和不确定的彩票是无差异的

圣彼得堡悖论

St. Petersburg paradox

- 反复抛一枚公正的硬币（即出现正面的概率是0.5），直至出现反面为止
- 奖金池起初有 1 元钱，游戏每进行一轮，奖金池中的钱翻倍
- 游戏在第一次出现反面时结束，你会获得奖金池中所有的钱
- 你愿意为参加这个游戏付多少钱?



$$E[u] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

虽然期望收益无限，但没人愿意付很多钱去参加这个游戏

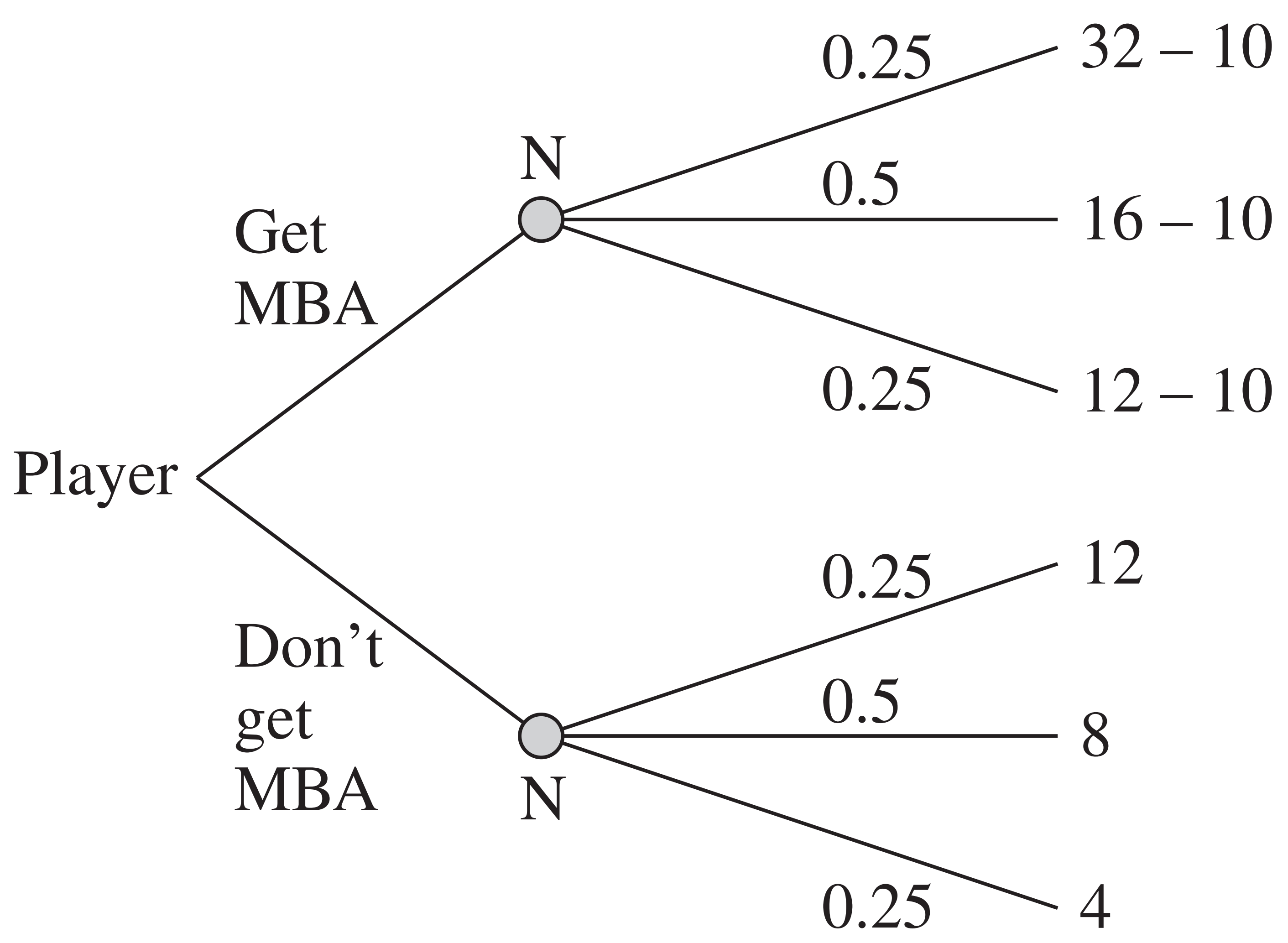
一种解释是多数人都是风险回避型，或者奖金的边际效用递减

不确定性下的理性决策

参与人的支付函数为 $u(x)$ 时，其基于期望收益选择最优行动的方式是理性的，即从所有的 $a \in A$ 中选择 $a^* \in A$，当且仅当

$$v(a^*) = E[u(x) \mid a^*] \geq E[u(x) \mid a] = v(a)$$

- 假设你工作几年后考虑是否读一个 MBA，你的选择会影响你之后的收入，但读 MBA 有成本



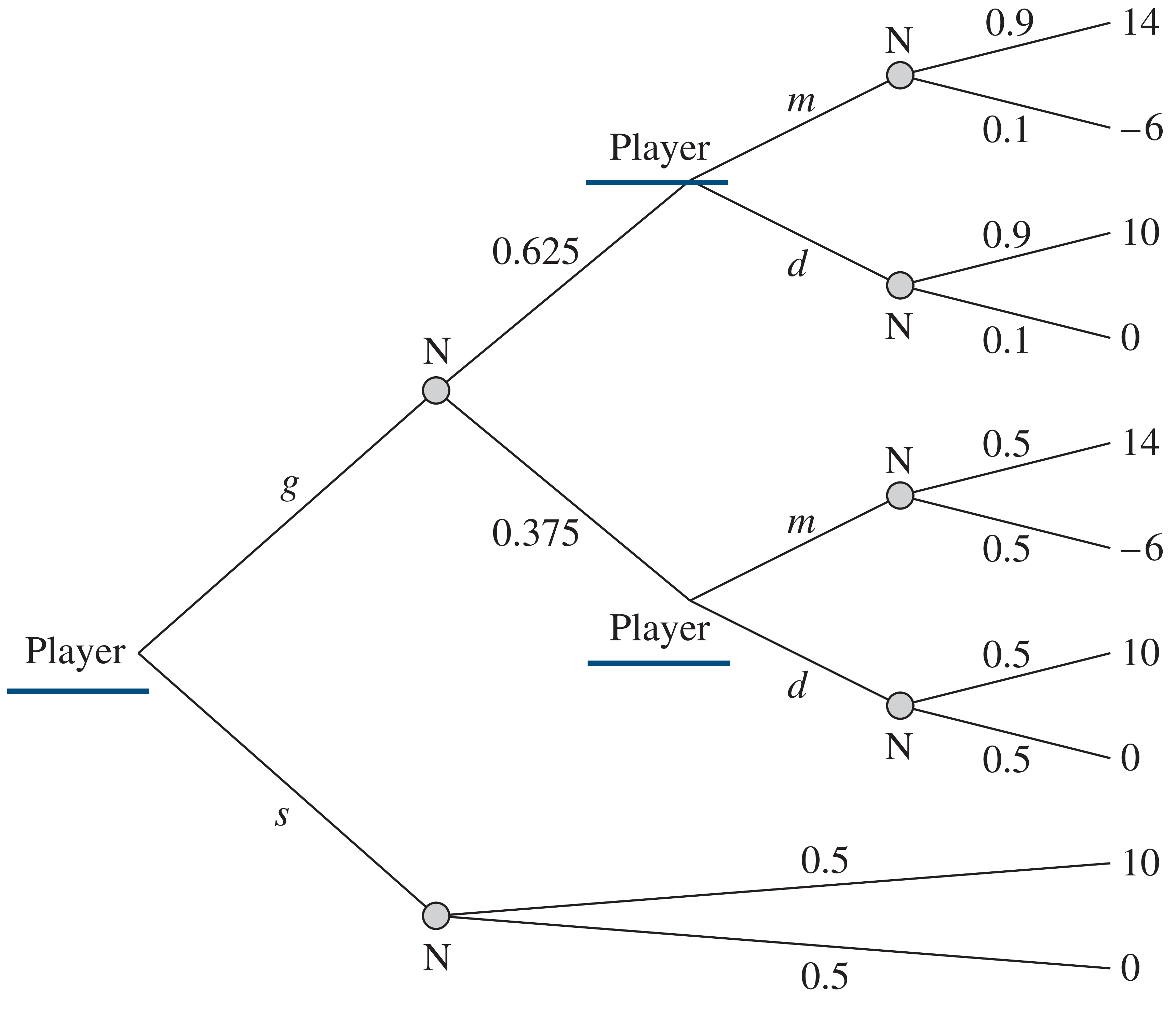
自然选择就业市场行情

$$v(\text{Get MBA}) = 0.25 \times 22 + 0.5 \times 6 + 0.25 \times 2 = 9$$

$$v(\text{Dont't get MBA}) = 0.25 \times 12 + 0.5 \times 8 + 0.25 \times 4 = 8$$

多期决策问题

- 我们经常会遇到需要连续做出多次决策的情形，而后面的决策往往受到前面决策结果的影响
- 我们继续初创公司的例子，并假设公司在知道扩张结果后，可以继续选择是否进行市场营销（m 为营销，d 为不营销），此时的决策树变为



在这个决策问题中，参与人有两次选择行为的机会

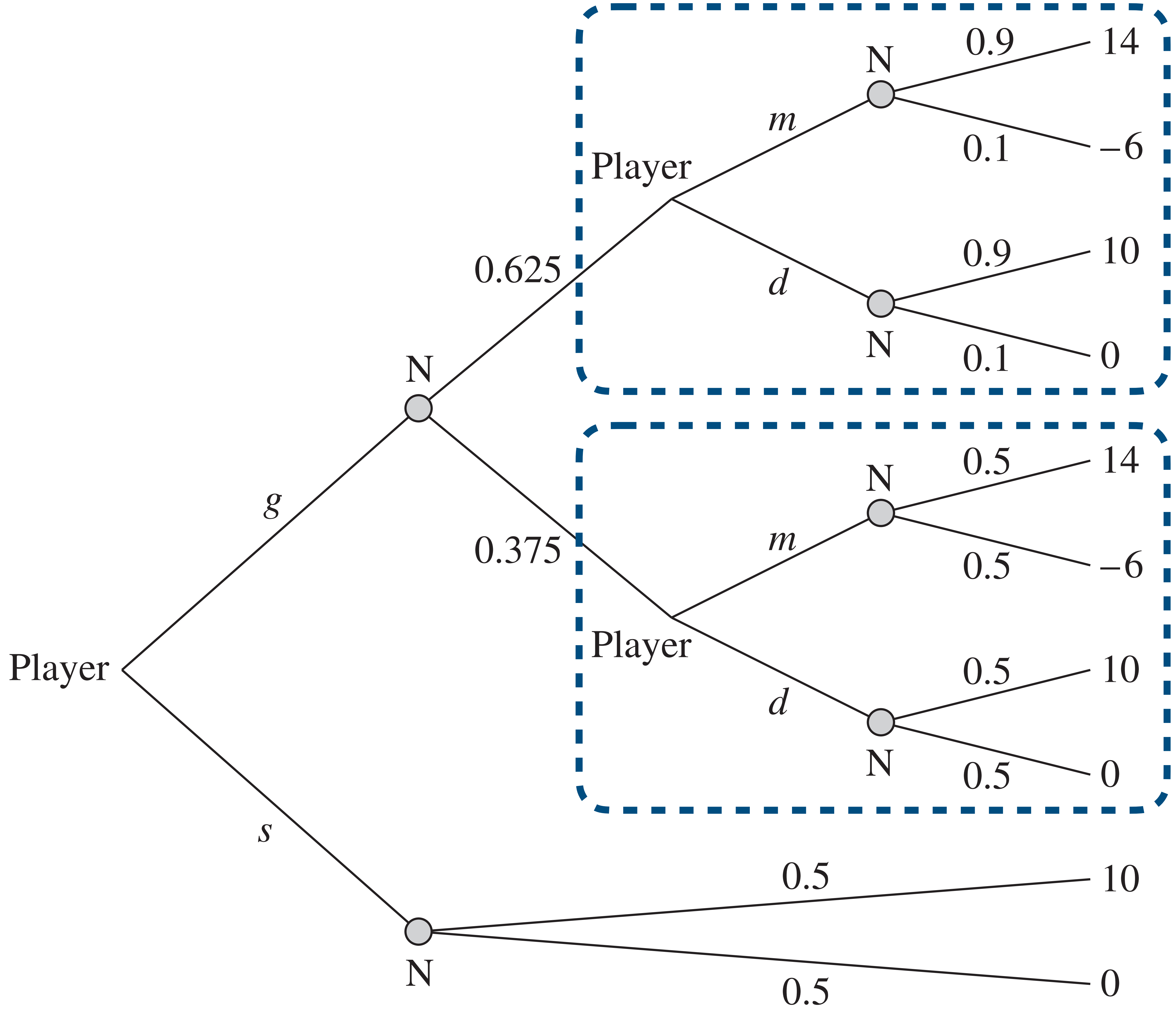
1. 选择是否扩张 $\{g, s\}$
2. 在选择扩张 g 并确定结果后，选择是否进行市场营销 $\{m, d\}$

自然也有两次决策的机会

i. 在参与人选择 g 后，决定扩张是否成功
ii. 在参与人做出其他决策后，决定公司经营是否成功

在多期决策问题中，我们假设

- 参与人在每一阶段都是理性的
- 决策方式被称为**动态规划**（**dynamic programming**）或**逆向归纳**（**backward induction**），即参与人在每个决策阶段都对后面可能发生的事进行预测，并做出理性选择

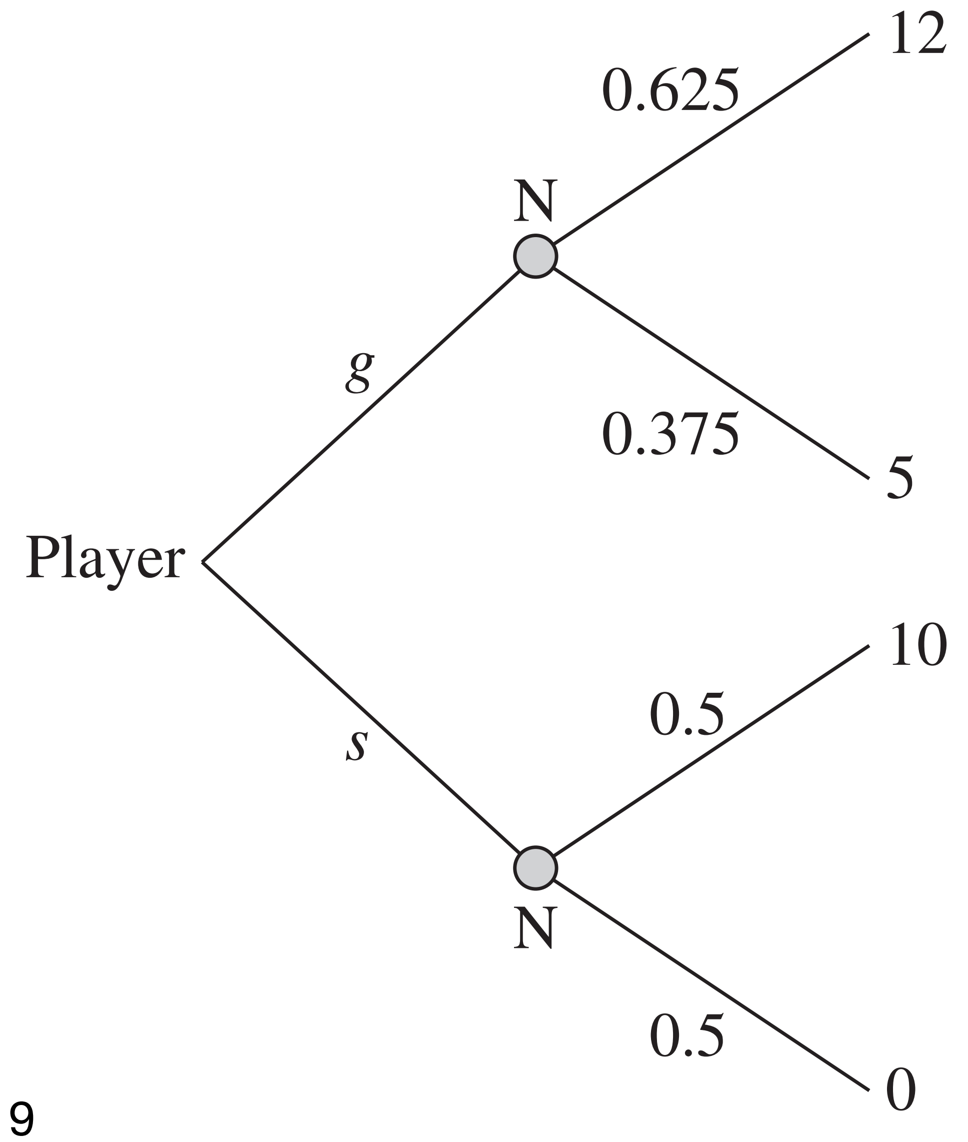


$v(m \mid \text{扩张成功}) = 0.9 \times 14 + 0.1 \times (-6) = 12$

$v(d \mid \text{扩张成功}) = 0.9 \times 10 + 0.1 \times 0 = 9$

$v(m \mid \text{扩张失败}) = 0.5 \times 14 + 0.5 \times (-6) = 4$

$v(d \mid \text{扩张失败}) = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 0 = 5$

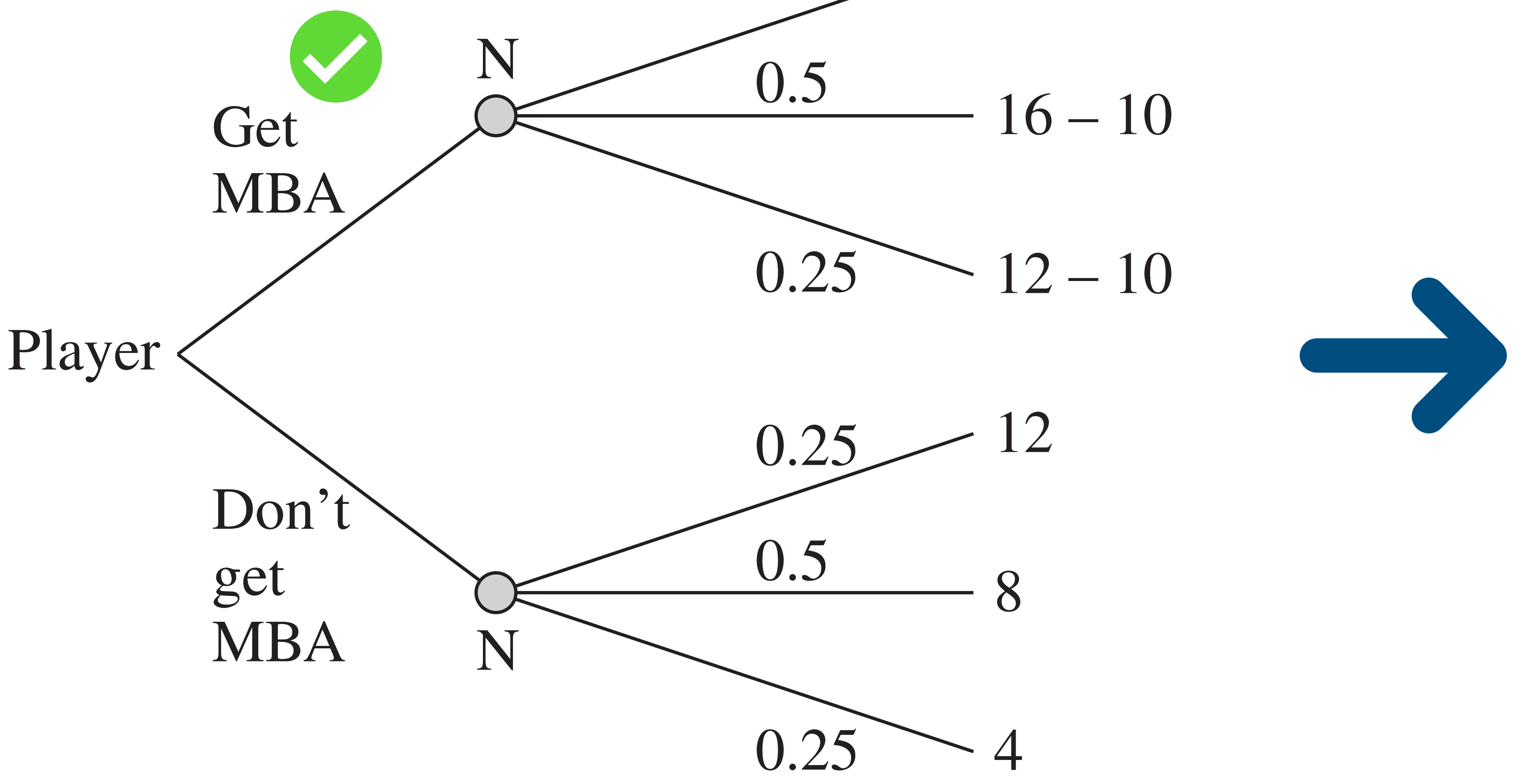


$v(g) = 0.625 \times 12 + 0.375 \times 5 = 9.375$

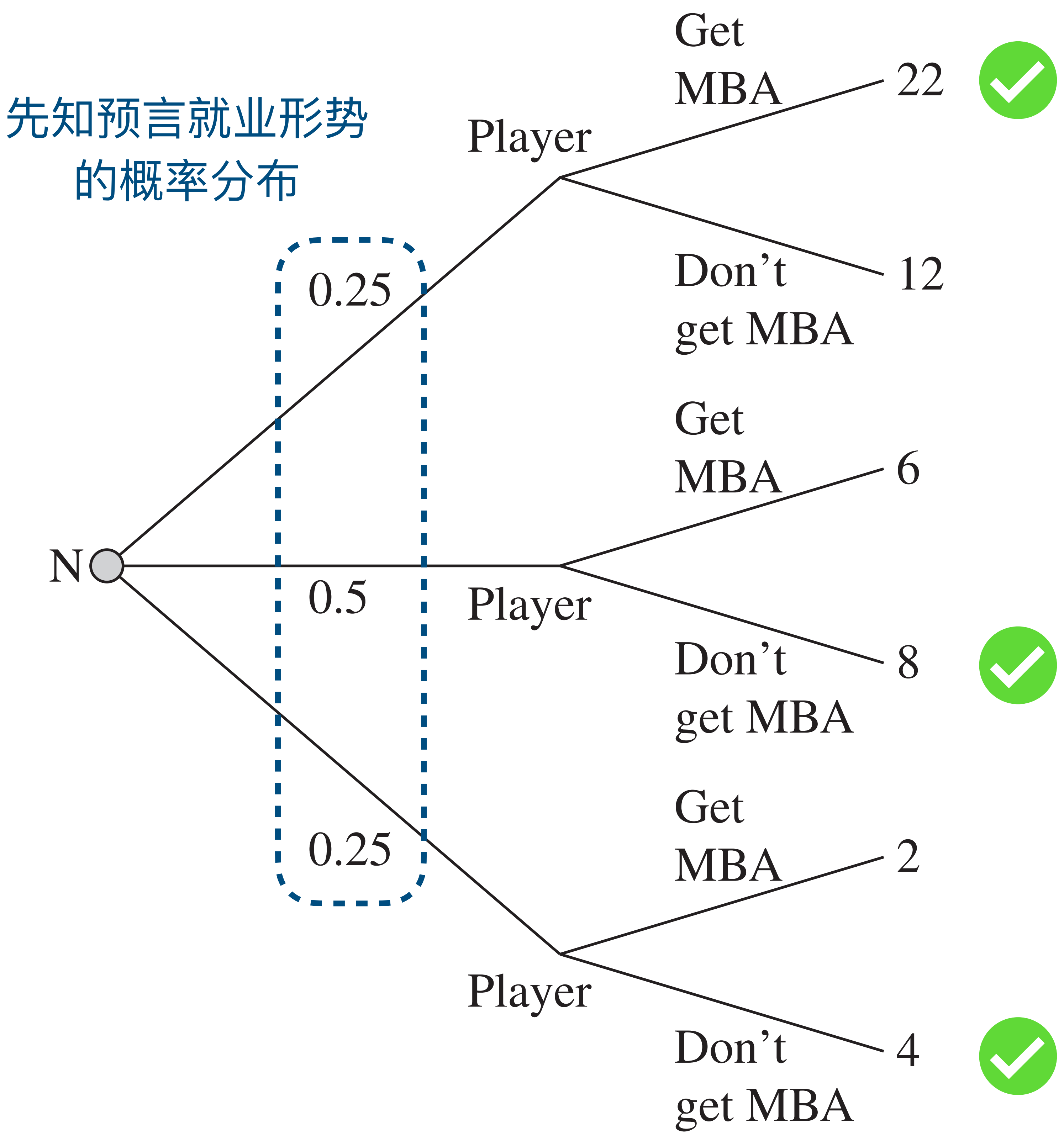
$v(s) = 5 \times 10 + 0.5 \times 0 = 5$

信息的价值

- 如果在你决定是否读 MBA 之前，有一个先知可以有偿地告诉你毕业后的就业形势，那么你愿意为这个预言付多少钱呢?



在原来的决策问题，你会选择读 MBA，其期望收益是 9



新的决策问题：
在知道就业形势后，你会做出不同的选择
而听预言带来的期望收益是
$E[u] = 0.25 \times 22 + 0.5 \times 8 + 0.25 \times 4 = 10.5$

因此，预言的价值是 $10.5 - 9 = 1.5$

例题：赛狗

- 假设你去美国的拉斯维加斯旅游，并有机会观看一场赛狗比赛
- 在参赛犬中，有一只拉布拉多和一只边牧引起了你的关注
  - 下注拉布拉多需要 1 美元，如果获胜你会获得 2 美元
  - 下注边牧也需要 1 美元，如果获胜你会获得 11 美元
- 从赛前信息你了解到，拉布拉多获胜的概率是 0.7，而边牧获胜的概率是 0.1
- 你对其他的参赛犬不感兴趣
- 你可以选择不下注，或者下注两只狗中的一只。你的目的是赢更多的钱

问题：

1. 画出这个问题的决策树
2. 你的最佳决策是什么？你的最大期望收益是多少？
3. 如果决定下注，你有机会加入“反向保险”，即赛前你收到 2 美元，而赛后你需要交出赢的钱的一半。你可以选择接受或者不接受这个反向保险。画出新的决策树并找到最优行动

例题：存钱还是花钱

- 假设你现在有100元，你需要决定如何在三天内（$t = 1, 2, 3$）将它花掉
- 你在第 t 天花的钱记作 x_t，消费带来的效用是 $u(x) = \ln x$，未来效用的折现因子是 $\delta = 0.9$，因此消费计划 (x_1, x_2, x_3) 的效用现值是 $u(x_1) + \delta u(x_2) + \delta^2 u(x_3 3)$

问题：

1. 你会怎样分配这100元?
2. 如果明天（$t = 2$）你会另外收到20元，你会怎样分配初始的100元和额外的20元?