博弈论与信息经济学

2. 完全信息静态博弈（一）

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

完全信息静态博弈

完全信息静态博弈

Static games of complete information

- **静态博弈**（static game）是包含多个参与人的单次决策问题，通常可以分为两个阶段
  - 所有参与人**同时且独立地**选择自己的行动
  - 根据参与人选择的行动支付相应的回报

- **完全信息**（complete information）是指所有参与人都了解博弈的所有细节，可分为下面四点
  - 所有参与人的所有备选行动
  - 所有可能发生的结果
  - 行动的组合如何影响结果
  - 每个参与人的偏好

- **共同知识**（common knowledge）：事件 E 是共同知识是指，
  1. 每个人都知道 E
  2. 每个人都知道“每个人都知道 E”，依此类推直至无穷

现实中的共同知识

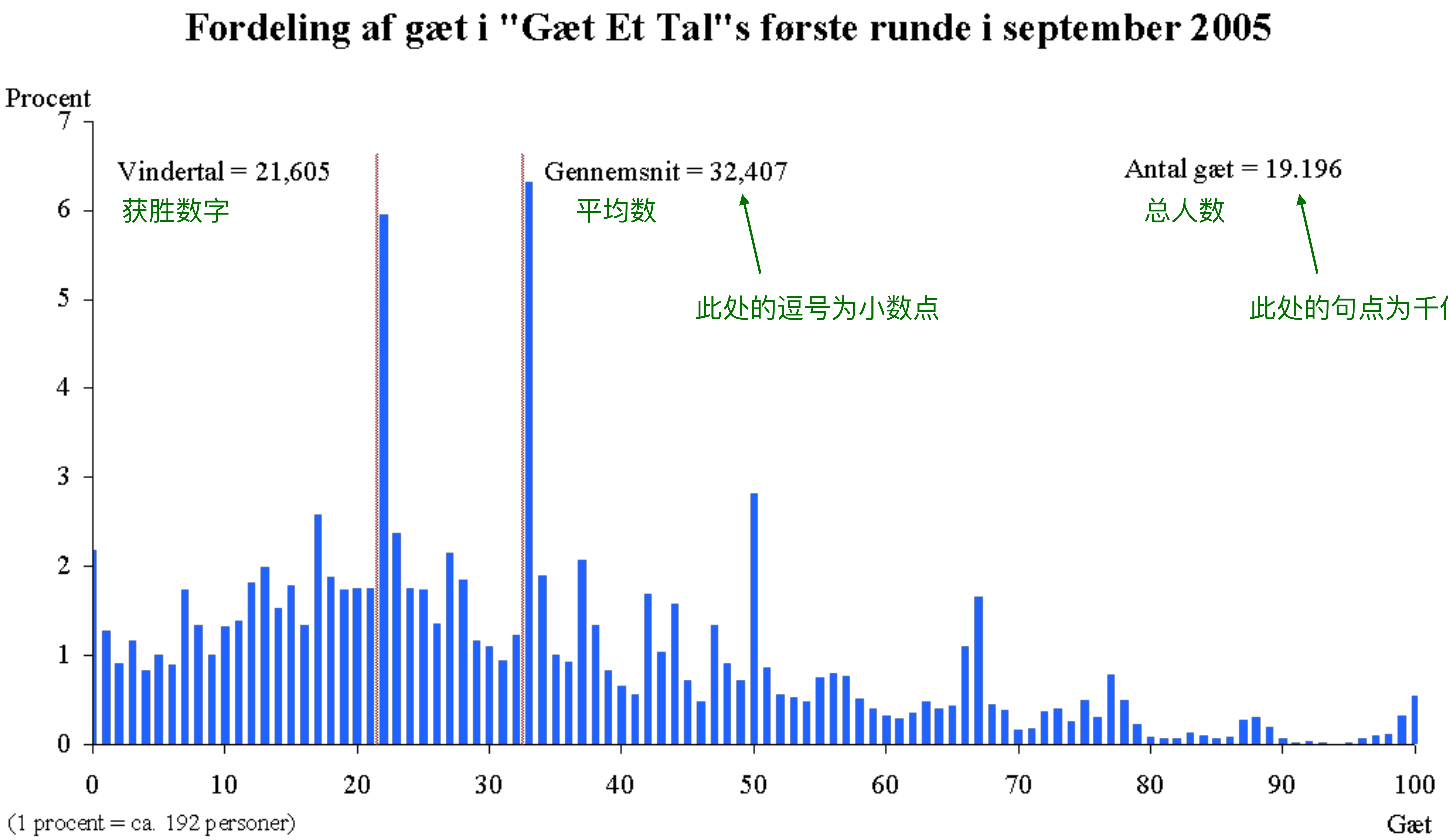
- 我预判了你的预判
  - 假设你考虑在下一个黄金周开车离深，为了避免拥堵，你需要选择一个合适的出发日期
  - 已知如果所有有车的深圳人都选择在同一天开车离深，则必然会堵车；如果同时出发的人数减半，则基本不会发生堵车
  - 你会选择在哪一天出发呢?

- 猜数字游戏
  - 每个参与人可以在 $[0, 100]$ 中选择一个实数，最接近平均数的 2/3 的人获胜
  - 你会选择什么数字呢?

如果假设所有人都随机选择数字，
则平均数为50，其 2/3 是 $100/3 \approx 33.333$

https://theincidentaleconomist.com/wordpress/analysis-of-whats-23-of-the-average/

丹麦报纸 *Politiken* 曾经在2005年9月22日报道过一个大规模线上实验的结果：
共有19196人参与，获胜奖金为5000丹麦克朗（按当时汇率约合3850元人民币），下图为参与人所选数字的分布



纯策略标准式博弈

Normal–form game with pure strategies

- 我们首先忽略不确定性，假设所有参与人都只选择一个确定的行动，且该行动会带来确定的结果

纯策略（pure strategy）：参与人 i 的纯策略是一个确定的行动计划。参与人 i 的所有纯策略的集合记作 S_i。纯策略向量 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_i \in S_i$, $i = 1,2,\ldots,n$ 描述了博弈中 n 个参与人的策略组合

- 和纯策略相对的概念是混合策略（mixed strategy），即随机选择行动。例如当你犹豫晚饭吃什么的时候，通过抛硬币的方式进行决策
- 在完全信息静态博弈中，选择策略等同于选择行动

标准式博弈（normal–form game）由以下三个部分构成：

标准式博弈也称策略式博弈（strategic-form game）

1. 有限参与人集合 $N = \{1,2,\ldots,n\}$
2. 参与人的纯策略集合的族 $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$
3. 支付函数的集合 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，其中 $v_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$, $i \in N$ 确定了每一种策略组合给参与人 i 带来的回报

标准式博弈的例子 1

囚徒困境博弈（the prisoner's dilemma game）

- 两个犯罪嫌疑人分别接受审讯。他们知道如果两个人都保持沉默（M），则警方会因为证据不足而无法起诉。如果一个人招供（F）而另一个人保持沉默，则保持沉默的人会被重罚，而招供的人会因为配合警方而获得减刑。如果两人都招供，则两人都会被起诉，但会因为无法分辨谁是主犯而受到较轻的惩罚

- 这个博弈的标准式描述是
  - 参与人：$N = \{1,2\}$
  - 策略集合：$S_i = \{M, F\},\ i \in \{1,2\}$
  - 支付函数：令 $v_i(s_1, s_2)$ 为策略组合 (s_1, s_2) 对应的参与人 i 的支付函数，则参与人获得的回报为

$$v_1(M,M) = v_2(M,M) = -2, \quad v_1(F,F) = v_2(F,F) = -4,$$
$$v_1(M,F) = v_2(F,M) = -5, \quad v_1(F,M) = v_2(M,F) = -1$$

标准式博弈的例子 2

古诺双寡头博弈（Cournot duopoly）

- 两家公司生产同一种产品。假设该产品固定成本为零，可变成本函数为 $c_i(q_i) = q_i^2$。市场需求函数为 $q = 100 - p$, $q = q_1 + q_2$
- 两家公司处于竞争关系，它们可以决定自己的产量 q_i，并理解总产量能影响市场价格

- 这个博弈的标准式描述是
  - 参与人：$N = \{1,2\}$
  - 策略集合：$S_i = [0,\infty)$, $i \in \{1,2\}$
  - 支付函数：当 $i, j \in \{1,2\}$ 且 $i \neq j$ 时

$$v_i(s_i, s_j) = \begin{cases} (100 - s_i - s_j) \cdot s_i - s_i^2 & \text{if } s_i + s_j < 100 \\ -s_i^2 & \text{if } s_i + s_j \geq 100 \end{cases}$$

当价格为正时，收益等于利润

当价格为零时，收益等于负成本

标准式博弈的例子 3

投票博弈（voting game）

- 由三个委员组成的委员会将针对是否采纳一项新政策进行投票
- 每个委员可以投赞成（Y），反对（N），或者弃权（A）
- 保持现状给每人的回报均为 0，新政策给委员 1 和 2 带来的回报为 1，给委员 3 带来的回报为 –1。投票遵循少数服从多数原则，即赞成票多于反对票时，视为新政策获得支持

- 这个博弈的标准式描述是
  - 参与人：$N = \{1,2,3\}$
  - 策略集合：$S_i = \{Y, N, A\}$, $i \in \{1,2,3\}$
  - 支付函数：令 P 为新政策获得支持的投票结果的集合，Q 为其他投票结果的集合，则

$$P = \left\{ \begin{array}{lll} (Y,Y,N), & (Y,N,Y), & (N,Y,Y), \\ (Y,Y,A), & (Y,A,Y), & (A,Y,Y), \\ (Y,A,A), & (A,Y,A), & (A,A,Y), \\ (Y,Y,Y) & & \end{array} \right\}$$

$$v_i(s_1,s_2,s_3) = \begin{cases} 1 & \text{if } (s_1,s_2,s_3) \in P \\ 0 & \text{if } (s_1,s_2,s_3) \in Q \end{cases} \quad \text{for } i \in \{1,2\}, \qquad v_3(s_1,s_2,s_3) = \begin{cases} -1 & \text{if } (s_1,s_2,s_3) \in P \\ 0 & \text{if } (s_1,s_2,s_3) \in Q \end{cases}$$

矩阵表达

两个参与人的有限博弈

- 标准式博弈虽然能够清晰地表达博弈的所有要素，但过于复杂（这种复杂程度很多时候是不必要的）
- 如果仅考虑两个参与人且策略集合为有限的博弈，则可以用我们熟悉的矩阵进行表达

有限博弈（finite game）是指参与人为有限，且每个参与人的策略集合都为有限的博弈

- 两人有限博弈的矩阵表达　在部分文献中也称为双矩阵（bi-matrix）
  - 行：每一行代表参与人 1 的一个策略
  - 列：每一列代表参与人 2 的一个策略
  - 要素：矩阵的每个要素都是向量 (v_1, v_2)，分别代表该策略组合对应的两个参与人的回报

囚徒困境博弈

		参与人 2	
		M	F
参与人 1	M	–2, –2	–5, –1
	F	–1, –5	–4, –4

矩阵表达：练习

- 石头剪刀布（rock–paper–scissors）博弈
  - 参与人：$N = \{1,2\}$
  - 策略集合：$S_i = \{R, P, S\}, \ i \in \{1,2\}$
  - 支付函数：获胜方的回报为 1，失败方的回报为 –1，平局时双方回报为 0

- 写出这个博弈的矩阵表达

博弈的解

Solution concepts

囚徒困境博弈

		参与人 2	
		M	F
参与人 1	M	−2, −2	−5, −1
	F	−1, −5	−4, −4

“利他主义”的囚徒困境博弈

		参与人 2	
		M	F
参与人 1	M	−3, −3	−5.5, −3.5
	F	−3.5, −5.5	−6, −6

Battle of Sexes

		Chris	
		Opera	*Football*
Alex	*Opera*	2, 1	0, 0
	Football	0, 0	1, 2

- 博弈的**解**（solution）是分析博弈的方法，其目的是从所有可能的结果中找到更加“合理”的结果
- 我们通常将博弈解所提示的战略组合称为**均衡**（equilibrium），并用其预测参与人的行动
- 均衡分析的假设：
  - 参与人是**理性的**（rational）：理性参与人通过最大化自身回报的方式选择行动
  - 参与人是**智慧的**（intelligent）：智慧的参与人了解博弈的所有特征，包括所有参与人的行动、结果和偏好
  - **共同知识**（common knowledge）：“所有参与人都是理性的和智慧的”是共通知识
  - **自执行**（self–enforcement）：任何均衡状态下，参与人的选择都是自愿而非被强迫的

解的评价标准

- **存在性（existence）**：该解在什么条件下可以保证其存在?
- **唯一性（uniqueness）**：该解在什么条件下可以保证其是唯一的?
- **不变性（invariance）**：如果博弈的结构发生微小变化（一般指回报），该解给出的预测会如何变化?

- 对结果的评价：帕累托最优
  - 对于策略组合 $s \in S$ 和 $s' \in S$，当 $\forall i \in N, v_i(s) \geq v_i(s')$ 且 $\exists i \in N, v_i(s) > v_i(s')$ 时，我们说 s **帕累托优于（Pareto dominates）**s', 也说 s' **帕累托劣于（Pareto dominated）**s
  - 当一个策略组合不是帕累托劣于任意其他策略组合时，我们称之为**帕累托最优（Pareto optimal）**

例题：公共品

Common goods

- 一个小镇的郊区有三户相邻的人家，由于缺少路灯，夜间出行不便，三户人家分别考虑是否要出钱增设路灯
- 增设路灯给每户带来的收益为 3，而不增设带来的收益为 0
- 通过政府的协调，每户人家可以选择出资或不出资，出资所花费的金额按收益单位换算为 1
- 如果至少两户人家出资，则可以增设路灯；否则不但无法增设，出资人也无法收回资金

- 写出这个博弈的标准式表达

理性与共同知识

劣势策略

Dominated strategies

- 我们首先定义几种简化的数学表达
  - 令 $v_i(s)$ 为策略组合 $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ 给参与人 i 带来的回报
  - 令 $s_{-i} = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ 为 s 中 i 以外的参与人的策略组合，令 $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$ 为 i 以外的参与人的策略组合的集合，则可以写成 $s_{-i} \in S_{-i}$
  - 参与人 i 的回报可以写成 $v_i(s) = v_i(s_i, s_{-i})$

令 $s_i \in S_i$ 和 $s_i' \in S_i$ 为参与人 i 的两个策略。如果针对任意的 $s_{-i} \in S_{-i}$，

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i})$$

成立，则称 s_i' **严格劣于（strictly dominated）** s_i，记作 $s_i \succ s_i'$

- 理性参与人绝对不会选择严格劣势策略

囚徒困境博弈

		参与人 2	
		M	F
参与人 1	M	–2, –2	–5, –1
	F	–1, –5	–4, –4

参与人 1 的严格劣势策略（$M \prec F$）

参与人 2 的严格劣势策略（$M \prec F$）

两个理性参与人都不会选择策略 M，因此 (F, F) 是最优策略

广告博弈

		公司 2		
		L	M	H
公司 1	L	6, 6	2, 8	0, 4
	M	8, 2	4, 4	1, 3
	H	4, 0	3, 1	2, 2

两家生产同一产品的公司面临选择广告规模的博弈：
L 为小规模，M 为中规模，H 为大规模

L 是严格劣势策略（$L \prec M$），但是 M 和 H 不是

优势策略均衡

策略 $s_i \in S_i$ 如果满足如下条件，则称之为 i 的**严格优势策略**（strictly dominant strategy）：针对任意的 $s_i' \in S_i$, $s_i \neq s_i'$ 及任意的 $s_{-i} \in S_{-i}$

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i})$$

即任意其他策略 s_i' 都严格劣于 s_i

如果策略组合 $s^D \in S$ 中所有要素 $s_i^D \in S_i$ 都是参与人 $i \in N$ 的严格优势策略，则称 s^D 为**严格优势策略均衡**（strict dominant strategy equilibrium）

- 囚徒困境博弈中的 (F, F) 即为严格优势策略均衡

定理：如果博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$ 中存在严格优势策略均衡 s^D，则 s^D 是唯一的

- 无法保证严格优势策略均衡的存在性 → Battle of Sexes
- 由于定义中使用了 $>$ 关系，严格优势策略均衡在回报的微小变化下是稳定的
- 严格优势策略均衡产生的结果可能不是帕累托最优 → 囚徒困境博弈中 $(-4, -4)$ 帕累托劣于 $(-2, -2)$

重复剔除严格劣势策略

Iterated elimination of strictly dominated strategies (IESDS)

- 理性参与人绝对不会选择严格劣势策略
- 从共同知识假设可知，每个理性参与人都知道其他参与人是理性的，因此他们不会选择严格劣势策略，同时其他参与人也知道这个推论
  - 因此，如果博弈中某个参与人存在严格劣势策略，则所有人都知道该参与人不会选择这个策略 → 我们可以将其剔除，从而形成一个新的博弈
  - 重复上一操作，直至不存在严格劣势策略

参与人 2

参与人 1		L	C	R
	U	4, 3	5, 1	6, 2
	M	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	2, 8

↑ *C* 严格劣于 *R*

参与人 2

参与人 1		L	R
	U	4, 3	6, 2
	M	2, 1	3, 6
	D	3, 0	2, 8

← ← *M* 和 *D* 严格劣于 *U*

参与人 2

参与人 1		L	R
	U	**4, 3**	6, 2

↑ *R* 严格劣于 *L*

执行重复剔除严格劣势策略后，任何剩余的策略组合 $s^{ES} = (s_1^{ES}, \ldots, s_n^{ES})$ 都被称为**重复剔除均衡**（iterated–elimination equilibrium）

简化版古诺双寡头博弈

- 我们将前面的古诺双寡头博弈中的可变成本函数简化为线性函数：$c_i(q_i) = 10q_i,\ i \in \{1,2\}$

1. 此时，公司 1 的支付函数为 $v_1(q_1, q_2) = (100 - q_1 - q_2) \cdot q_1 - 10q_1 = -q_1^2 + (90 - q_2)\, q_1$
   - 如果已知公司 2 的产量为 q_2，公司 1 的最优策略为 $q_1 = (90 - q_2)/2$
   - 因为 $q_2 \geq 0$，可得 $q_1 \leq 45$，即
     对于公司 1，任何超过 45 的产量都是严格劣势策略
   - 同样的分析也适用于公司2 $\Rightarrow q_i \in [0,45],\ i \in \{1,2\}$
2. 将 $q_j \leq 45$ 代入 $q_i = (90 - q_j)/2$ 可得 $q_i \geq 22.5$
   $\Rightarrow q_i \in [22.5,45],\ i \in \{1,2\}$
3. 将 $q_j \geq 22.5$ 代入 $q_i = (90 - q_j)/2$ 可得 $q_i \leq 33.75$
   $\Rightarrow q_i \in [22.5,33.75],\ i \in \{1,2\}$
4. 重复以上步骤
   $\Rightarrow$ 参考右图，重复剔除均衡是直线 $q_1 = q_2$ 和
   $q_1 = (90 - q_2)/2$ 的交点，即 $(q_1, q_2) = (30,30)$

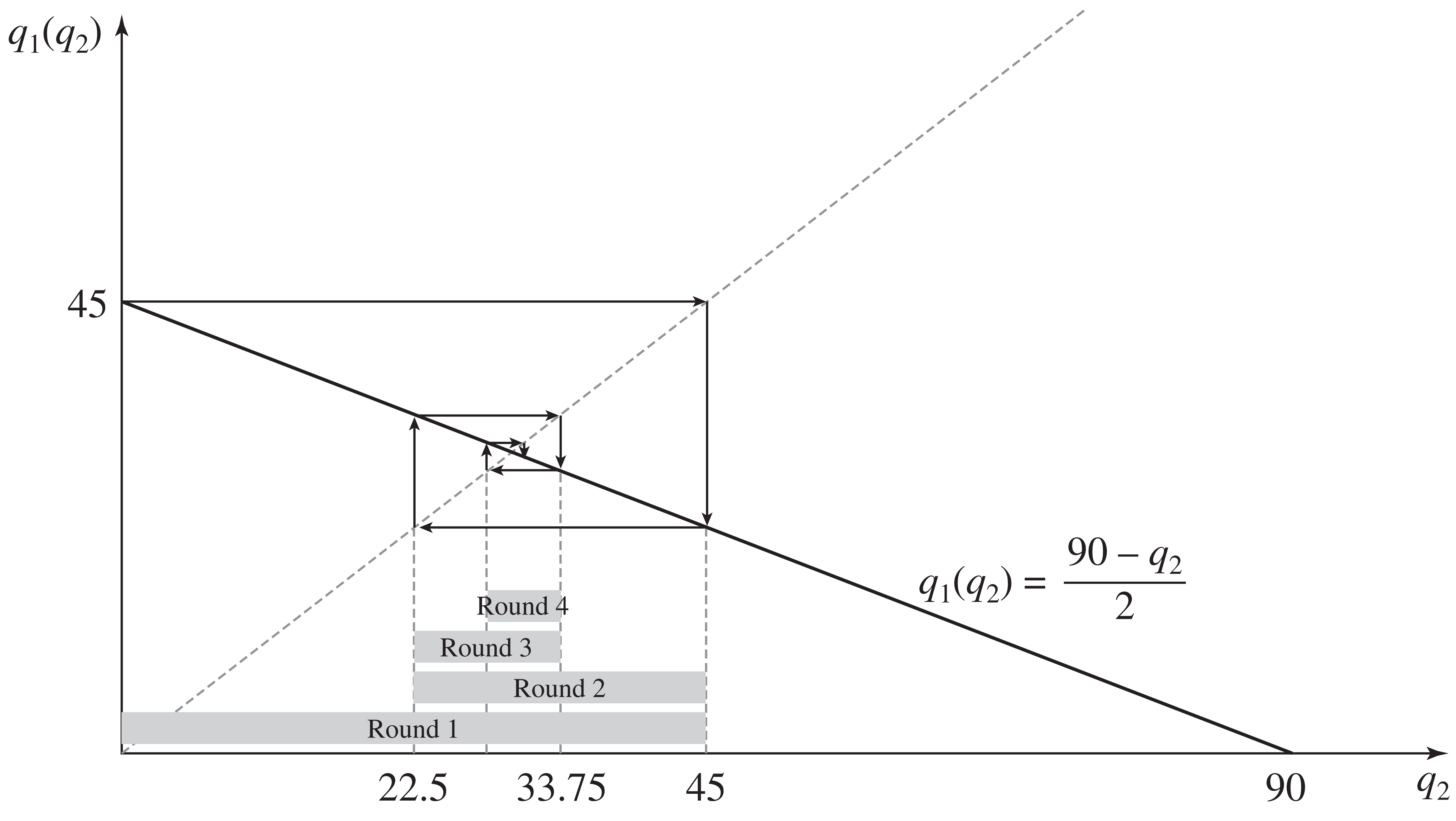


FIGURE 4.1 IESDS convergence in the Cournot game.

对重复剔除均衡的评价

- 重复剔除均衡需要假设参与人的理性是共同知识
- 重复剔除均衡永远存在
- 重复剔除均衡不能保证解的唯一性 → 广告博弈
- 重复剔除均衡的结果不一定是帕累托最优 → 囚徒困境博弈

广告博弈

		公司 2		
		~~*L*~~	*M*	*H*
	~~*L*~~	~~6, 6~~	~~2, 8~~	~~0, 4~~
公司 1	*M*	~~8, 2~~	4, 4	1, 3
	H	~~4, 0~~	3, 1	2, 2

定理：如果策略组合 s^* 是博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$ 的严格优势策略均衡，那么它也是该博弈唯一的重复剔除均衡

信念和最优反应

Beliefs and best response

- 在 Battle of Sexes 博弈中，严格优势策略均衡和重复剔除均衡都无法预测参与人的行动
- 如果我们假设 Alex 相信 Chris 会选择 Opera，则理性的 Alex 也会选择 Opera

Battle of Sexes

		Chris: *Opera*	Chris: *Football*
Alex	*Opera*	2, 1	0, 0
Alex	*Football*	0, 0	1, 2

参与人 i 的**信念**（**belief**）是 i 以外其他参与人的一种策略组合 $s_{-i} \in S_{-i}$

如果策略 $s_i \in S_i$ 满足

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}), \quad \forall s_i' \in S_i$$

则称其为参与人 i 对其他参与人的策略组合 $s_{-i} \in S_{-i}$ 的**最优反应**（**best response**）。s_{-i} 的最优反应的集合记作 $BR_i(s_{-i})$

- 每一个信念 s_{-i} 都可以对应一个或多个最优反应，因此我们可以把 $BR_i(s_{-i})$ 看作一种函数（实际上是函数的扩展概念，数学上称为**对应 correspondence**）
- 理性参与人在每一个信念下一定会选择最优反应；严格劣势策略不会成为任何信念的最优反应
- 理性参与人不会选择无法成为最优反应的策略 → 我们可以重复剔除无法成为最优反应的策略，其结果称为**可理性化策略**（**rationalizable strategies**）
- 在有限标准式博弈中，如果存在严格优势策略均衡 s^*，则对所有参与人 $i \in N$，s_i^* 是 s_{-i}^* 的最优反应

例题：第一价格拍卖

First-price auction

- 两个参与人参加了一件艺术品的拍卖会
- 参与人 1 认为该艺术品的价值是 3，参与人 2 认为其价值是 5
- 两人各有一次出价机会，均可出价 0, 1, 或 2
- 出价高者为赢家，赢家获得该艺术品并支付所出价格，输家不需要支付任何费用；如果出价相同则通过抛硬币决定谁是赢家

- 回答下面的问题：
  1. 写出这个博弈的矩阵表达
  2. 存在严格劣势策略吗?
  3. 找到重复剔除均衡