博弈论与信息经济学

3. 完全信息静态博弈（二）

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平　中国经济特区研究中心讲师　工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510　　Email: huangjp@szu.edu.cn

纳什均衡

纯策略纳什均衡

Nash equilibrium in pure strategies

- 在 Battle of Sexes 博弈中，不存在严格优势策略均衡，
  重复剔除严格劣势策略或理性化（重复剔除无法成为最优反应的策略）也无效
- 为了分析这类博弈，纳什（John F. Nash）在 1950 年提出了纳什均衡的概念

Battle of Sexes

		Chris: *Opera*	Chris: *Football*
Alex	*Opera*	2, 1	0, 0
	Football	0, 0	1, 2

在博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$ 中，纯策略组合 $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ 如果满足下列条件

对于所有的 $i \in N$，s_i^* 是 s_{-i}^* 的最优反应　　即对于参与人 i 所有可选策略 $s_i' \in S_i$，有 $v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*)$

则称 s^* 是 Γ 的一个**纳什均衡（Nash equilibrium）**

- 纳什均衡可以解释为，所有的参与人都有正确的信念，并针对该信念选择自己的最优反应
- 在 Battle of Sexes 博弈中，(*Opera*, *Opera*) 和 (*Football*, *Football*) 都是纳什均衡
- 在右侧的博弈中（已知 (U, L) 是重复剔除均衡）
  - (U, L) 是纳什均衡：对于参与人 1，$U \succ M \succ D$；对于参与人 2，$L \succ R \succ C$
  - 不存在其他纳什均衡

		参与人 2: *L*	参与人 2: *C*	参与人 2: *R*
参与人 1	*U*	**4, 3**	5, 1	6, 2
	M	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	2, 8

纳什均衡的例子

- 囚徒困境博弈：
  - 唯一的纳什均衡是 (F, F)

同时也是严格优势策略均衡

- 广告博弈
  - 纳什均衡：(M, M), (H, H)

不存在严格优势策略均衡，同时只有 L 是严格劣势策略

- 简化版古诺双寡头博弈
  - 纳什均衡：$(q_1^*, q_2^*) = (30, 30)$

$$v_1(q_1, 30) = -q_1^2 + 60q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1^* = 30$$
$$v_2(30, q_2) = -q_2^2 + 60q_2 \quad \Rightarrow \quad q_2^* = 30$$

同时也是重复剔除均衡

囚徒困境博弈

参与人 2

参与人 1		*M*	*F*
	M	–2, –2	–5, –1
	F	–1, –5	**–4, –4**

广告博弈

公司 2

公司 1		*L*	*M*	*H*
	L	6, 6	2, 8	0, 4
	M	8, 2	**4, 4**	1, 3
	H	4, 0	3, 1	**2, 2**

简化版古诺双寡头博弈

- 可变成本：$c_i(q_i) = 10q_i,\ i \in \{1,2\}$
- 需求函数：$q = 100 - p,\ q = q_1 + q_2$
- 支付函数：$v_1(q_1, q_2) = -q_1^2 + (90 - q_2)\,q_1$
  $v_2(q_1, q_2) = -q_2^2 + (90 - q_1)\,q_2$

均衡间的关系

定理：如果策略组合 $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ 满足下面条件之一，

1. s^* 是唯一的严格优势策略均衡
2. s^* 是唯一的重复剔除均衡
3. s^* 是唯一的可理性化策略组合

注意：1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3

则 s^* 是唯一的纳什均衡

- 证明：
  - s^* 是严格优势策略均衡 $\Leftrightarrow$ $v_i(s_i^*, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i})$ for all $s_i' \neq s_i^*$ and all $s_{-i} \in S_{-i}$
  - s^* 是重复剔除均衡 $\Rightarrow$ s_i^* 不会严格劣于任意的 s_i' $\Leftrightarrow$ $v_i(s_i^*, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i})$ for all $s_i' \neq s_i^*$ and all $s_{-i} \in S_{-i}$
  - s^* 是唯一的可理性化策略组合 $\Leftrightarrow$ s_i^* 是 s_{-i}^* 的最优反应 $\Leftrightarrow$ $v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*)$ for all $s_i' \neq s_i^*$
    $\Leftrightarrow$ s^* 是纳什均衡（定义），且唯一
- 存在多个可理性化策略组合（即重复删除无法成为最优反应的策略后，剩余的策略组合不唯一）时，可理性化策略组合与纳什均衡不等价（可参考广告博弈）

如何在矩阵博弈中找出纳什均衡

参与人 2

		L	*C*	*R*
	U	7, 7	4, 2	1, 8
参与人 1	*M*	2, 4	5, 5	2, 3
	D	8, 1	3, 2	0, 0

- 如果存在纳什均衡，则可以通过下面的方法找到
  1. 针对每一列（即参与人 2 的每一个策略），找到参与人 1 的最大回报值并进行标注（例如添加下划线，或添加$*$）

参与人 2

		L	*C*	*R*
	U	7, 7	4, 2	1, 8
参与人 1	*M*	2, 4	$\underline{5}$, 5	$\underline{2}$, 3
	D	$\underline{8}$, 1	3, 2	0, 0

  2. 针对每一行（即参与人 1 的每一个策略），找到参与人 2 的最大回报值并进行标注
  3. 如果在同一个矩阵要素中两个参与人的回报都被标注则该要素对应的策略组合就是纳什均衡

参与人 2

		L	*C*	*R*
	U	7, 7	4, 2	1, $\underline{8}$
参与人 1	*M*	2, 4	$\underline{5}$, $\underline{5}$	$\underline{2}$, 3
	D	$\underline{8}$, 1	3, $\underline{2}$	0, 0

右侧博弈的唯一纳什均衡是 (M, C)

对纳什均衡的评价

- 存在性：
  - 当其他均衡不存在时，纳什均衡可能存在；
  - 当其他均衡存在唯一解时，该解也是唯一的纳什均衡；
  - 纳什均衡也可能不存在
- 唯一性：纳什均衡可能不是唯一的（例如 Battle of Sexes）
- 不变性：定义中使用了 $\geq$ 关系，因此可能对微小变化敏感
- 结果的帕累托最优性：纳什均衡无法保证结果的帕累托最优性（例如囚徒困境博弈）

公地悲剧

The tragedy of commons

- 一群牧民共享一块牧场。每个牧民都想通过扩大畜牧规模而增加收入。例如每增加一头羊都会增加其牧主的收入，但是增加的成本（牧场整体质量的下降）则要所有牧民共同承担。如果每个牧民都不断增加自己的畜牧规模，则最终所有人都无法继续生存。
- 我们可以定义下面的博弈：
  - 参与人：$N = \{1,\ldots,n\}$
  - 策略：$k_i \in \mathbb{R}_+,\ i \in N,\ \sum_{i=1}^n k_i \le K$ 每个参与人 i 都需要消耗一定量的清洁空气 k_i 进行生产，而清洁空气的总量为 K
  - 支付函数：策略组合 $k = (k_1, \ldots, k_n)$ 给参与人 i 带来的回报为

$$v_i(k_i, k_{-i}) = \ln(k_i) + \ln\left(K - \sum_{i=1}^n k_i\right)$$

用 k_i 进行生产给参与人 i 带来的收益为 $\ln(k_i)$，而剩余清洁空气给每个人带来的效用为 $\ln\left(K - \sum_{i=1}^n k_i\right)$

- 针对每个 i，k_i 是 k_{-i} 的最优反应意味着

$$k_i = \underset{s_i}{\operatorname{argmax}}\ v_i(s_i, k_{-i}) \quad \Rightarrow \quad k_i \text{ 满足一阶条件 } \frac{\partial v_i(k_i, k_{-i})}{\partial k_i} = \frac{1}{k_i} - \frac{1}{K - \sum_{i=1}^n k_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_i = \frac{K - \sum_{j \ne i} k_j}{2}$$

- 当 $n = 2$ 时，$k_1(k_2) = (K - k_2)\big/2$，$k_2(k_1) = (K - k_1)\big/2$ $\quad \Rightarrow \quad$ 纳什均衡为 $(k_1^*, k_2^*) = \left(\frac{K}{3}, \frac{K}{3}\right)$

公地悲剧

The tragedy of commons

- 当 $n=2$ 时，纳什均衡为 $(k_1^*, k_2^*) = \left(\frac{K}{3}, \frac{K}{3}\right)$
- $\left(\frac{K}{3}, \frac{K}{3}\right)$ 会带来帕累托最优结果吗?
  - 令 $w(k_1, k_2) = v_1(k_1, k_2) + v_2(v_1, v_2)$，并考虑 $\max\limits_{k_1, k_2} \ w(k_1, k_2)$
  - 一阶条件为

$w(k_1, k_2)$ 称为社会福利函数

$$\frac{\partial w(k_1, k_2)}{\partial k_1} = \frac{1}{k_1} - \frac{2}{K - k_1 - k_2} = 0$$
$$\frac{\partial w(k_1, k_2)}{\partial k_2} = \frac{1}{k_2} - \frac{2}{K - k_1 - k_2} = 0$$

  - 最优解为 $(k_1^\#, k_2^\#) = \left(\frac{K}{4}, \frac{K}{4}\right)$。此策略组合的结果为帕累托最优
  - 可以很容易地确认 $\left(\frac{K}{4}, \frac{K}{4}\right)$ 帕累托优于 $\left(\frac{K}{3}, \frac{K}{3}\right)$
- 基于自身利益最大化的纳什均衡实际上带来了过度消费

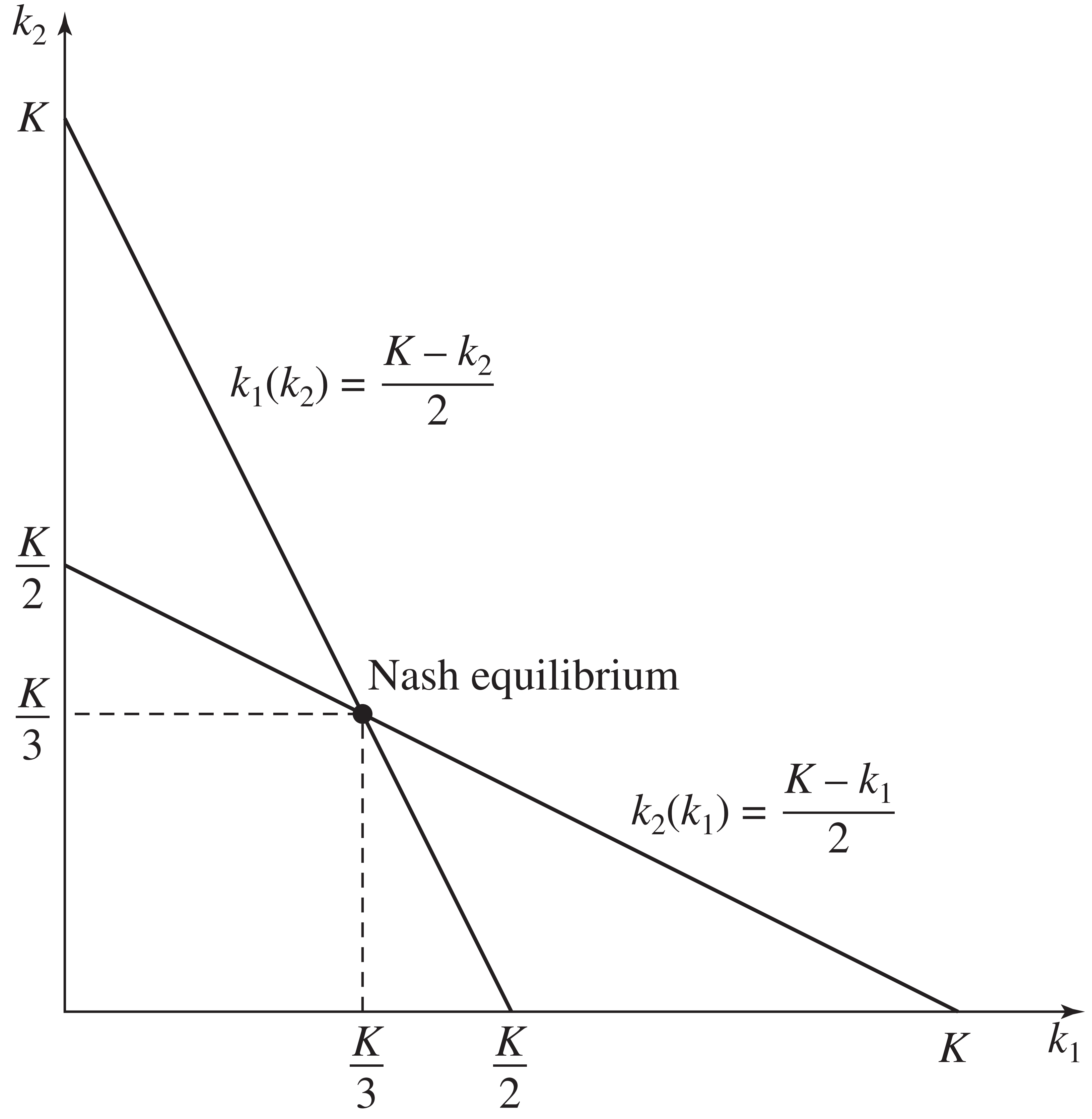
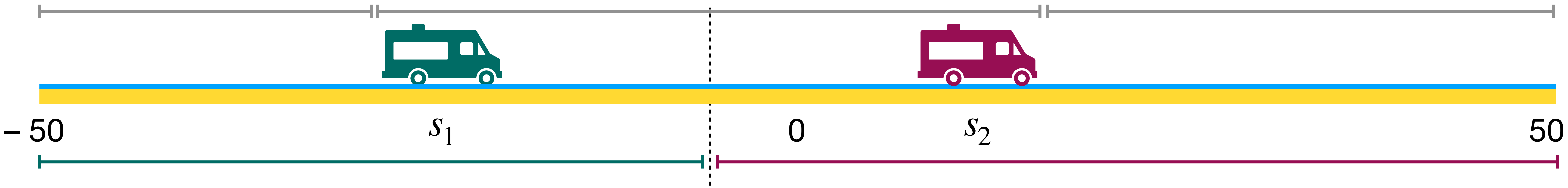


FIGURE 5.1 Best-response functions: two-player tragedy of the commons.

练习：含 n 个参与人的公地悲剧博弈

- 考虑含 n 个参与人的公地悲剧博弈，并回答下面的问题
  1. 找到纳什均衡
  2. 通过最大化社会福利函数找到帕累托最优策略组合
  3. 当 $n \to \infty$ 时，纳什均衡对应的的消费和回报如何变化?

沙滩上的冷饮摊位：Hotelling 模型



- 在同一片沙滩上有两个冷饮摊位。假设游客只会光顾离他们最近的冷饮摊位（如果离两个摊位的距离一样，则随机选择），且游客均匀分布在整片沙滩上，那摊主应该把摊位放在什么位置呢?
- 为了简化问题，设沙滩为一维直线，上面均匀分布着 101 名游客，并用 −50 至 50 的整数依次命名
- 博弈的定义：
  - 参与人：$N = \{1, 2\}$
  - 策略：$S_i = \{-50, -49, \ldots, 49, 50\}, \ i \in \{1,2\}$
  - 支付函数：

$$v_1(s_1, s_2) = \begin{cases} [s_1 - (-50)] + (s_2 - s_1 + 1)/2 & \text{if } s_1 < s_2 \\ 50.5 & \text{if } s_1 = s_2 \\ [50 - s_1] + (s_1 - s_2 + 1)/2 & \text{if } s_1 > s_2 \end{cases}, \qquad v_2(s_1, s_2) = \begin{cases} [50 - s_2] + (s_2 - s_1 + 1)/2 & \text{if } s_1 < s_2 \\ 50.5 & \text{if } s_1 = s_2 \\ [s_2 - (-50)] + (s_1 - s_2 + 1)/2 & \text{if } s_1 > s_2 \end{cases}$$

- 纳什均衡为 $(0, 0)$

混合策略

混合策略

Mixed strategy

令 $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\}$ 为参与人 i 的有限纯策略集合。我们称 S_i 上的所有概率分布的集合 ΔS_i 为 S_i 的**单纯形（complex）**。参与人 i 的一个**混合策略（mixed strategy）**是 S_i 上的一个概率分布 $\sigma_i \in \Delta S_i$，即

$$\sigma_i = \big(\sigma_i(s_{i1}), \sigma_i(s_{i2}), \ldots, \sigma_i(s_{im})\big),$$

其中 $\sigma_i(s_i)$ 是策略 s_i 的概率

根据离散概率分布函数的定义：

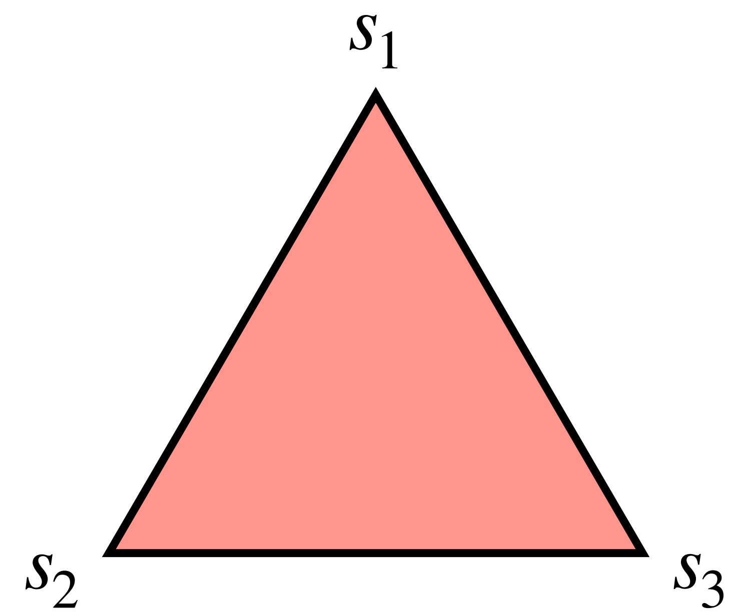
1. $\sigma_i(s_i) \geq 0$ for all $s_i \in S_i$,
2. $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$

硬币匹配博弈

参与人 2

		H	T
参与人 1	H	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
	T	$-1, \underline{1}$	$\underline{1}, -1$

不存在纯策略纳什均衡



三个纯策略构成的单纯形

- 在硬币匹配博弈中，设参与人 i 选择策略 H 的概率是 $\sigma_i(H) = p_i$，$0 \leq p_i, \leq 1$，则参与人 i 的混合策略可以表达为 $(p_i, 1 - p_i)$，或简写为 p_i

混合策略 σ_i 中，所有概率为正的纯策略 $s_i \in S_i$ 的集合，即 $\{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$，称为 σ_i 的**支撑（support）**

如果参与人 i 的纯策略集合 S_i 是一个连续区间，则 i 的混合策略是 S_i 上的累积分布函数 $F_i : S_i \to [0, 1]$，即 $F_i(x) = \Pr(s_i \leq x)$。如果 F_i 存在密度函数 f_i，则称密度为正的策略 s_i 的集合，即 $\{s_i \in S_i : f_i(s_i) > 0\}$，为 F_i 的支撑

混合策略和信念

- 混合策略的概念不仅给参与人提供了更多策略选择，也让参与人的信念有了更多的选择
- 在纯策略下，信念定义为其他参与人的策略组合 s_{-i}，是参与人 i 对其他参与人策略的一种预测。如果每个参与人都可以选择混合策略，则信念的定义也随之改变为其他参与人策略组合的概率分布

在混合策略下，参与人 i 的信念是其他参与人的策略组合的概率分布 $\pi_i \in \Delta S_{-i}$，即 $\pi(s_{-i})$ 代表其他参与人选择策略组合 $s_{-i} \in S_{-i}$ 的概率

- 例如三人投票博弈中，如果参与人 1 预测参与人 2 的混合策略（即选择 (Y, N, A) 的概率）是 $(0.2, 0.8, 0)$，参与人 3 的混合策略是 $(0.4, 0, 0.6)$，则参与人 1 的信念表达为

$$\pi_1(Y,Y) = 0.08,\ \ \pi_1(Y,A) = 0.12,\ \ \pi_1(N,Y) = 0.32,\ \ \pi_1(N,A) = 0.48,$$
$$\pi_1(Y,N) = \pi_1(N,N) = \pi_1(A,N) = \pi_1(A,Y) = \pi_1(A,A) = 0$$

注意：也可以将参与人 i 对参与人 j 的混合策略的预测称为 i 对 j 的信念，例如 $(0.2, 0.8, 0)$ 为参与人 1 对参与人 2 的信念。在独立决策的条件下，可以推出上面的定义（即通过边际分布计算联合分布）

期望回报

Expected payoff

当参与人 i 选择纯策略 $s_i \in S_i$，而其他参与人选择混合策略 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ 时，参与人 i 的期望回报是

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) \cdot v_i(s_i, s_{-i})$$

当参与人 i 选择混合策略 $\sigma_i \in \Delta S_i$，而其他参与人选择混合策略 $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ 时，参与人 i 的期望回报是

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \cdot v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \left(\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) \cdot \sigma_{-i}(s_{-i}) \cdot v_i(s_i, s_{-i}) \right)$$

- 以前面的三人投票博弈为例，如果参与人 1 选择纯策略是 Y，则其期望回报为

$$\begin{aligned} & 0.08 \times v_1(Y,Y,Y) + 0.12 \times v_1(Y,Y,A) + 0.32 \times v_1(Y,N,Y) + 0.48 \times v_1(Y,N,A) \\ = {} & 0.08 \times 1 + 0.12 \times 1 + 0.32 \times 1 + 0.48 \times 0 \\ = {} & 0.52 \end{aligned}$$

混合策略纳什均衡

Mixed-strategy Nash equilibrium

在博弈 $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n \rangle$ 中，混合策略组合 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 如果满足下列条件

对于所有的 $i \in N$，σ_i^* 是 σ_{-i}^* 的最优反应

即对于参与人 i 所有可选混合策略 $\sigma_i' \in \Delta S_i$，有 $v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*)$

则称 σ^* 是 Γ 的一个（混合策略）纳什均衡

- 纯策略纳什均衡是混合策略纳什均衡的一种特殊形式

定理：如果 σ^* 是纳什均衡，且 s_i 和 s_i' 都在 σ_i^* 的支撑中，则 $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$

- 可以用反证法证明此定理。如果 $v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) > v_i(s_i', \sigma_{-i}^*)$，则参与人 i 可以考虑混合策略 $\sigma_i^\#$，其中 $\sigma_i^\#(s_i') = 0$，$\sigma_i^\#(s_i) = \sigma_i^*(s_i) + \sigma_i^*(s_i')$。此时 $v_i(\sigma_i^\#, \sigma_{-i}^*) > v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$，因此 σ^* 不是 σ_{-i}^* 的最优反应。
- 换句话说，混合策略的支撑中的每个纯策略对于参与人来说都是无差别的，且拥有同样支撑的任何混合策略也都是无差别的

例题：匹配硬币博弈

匹配硬币博弈

		参与人 2	
		H	T
参与人 1	H	1, −1	−1, 1
	T	−1, 1	1, −1

- 假设参与人 1 选择 H 的概率为 p，参与人 2 选择 H 的概率为 q
- 混合策略组合 (p,q) 对应的期望回报为：

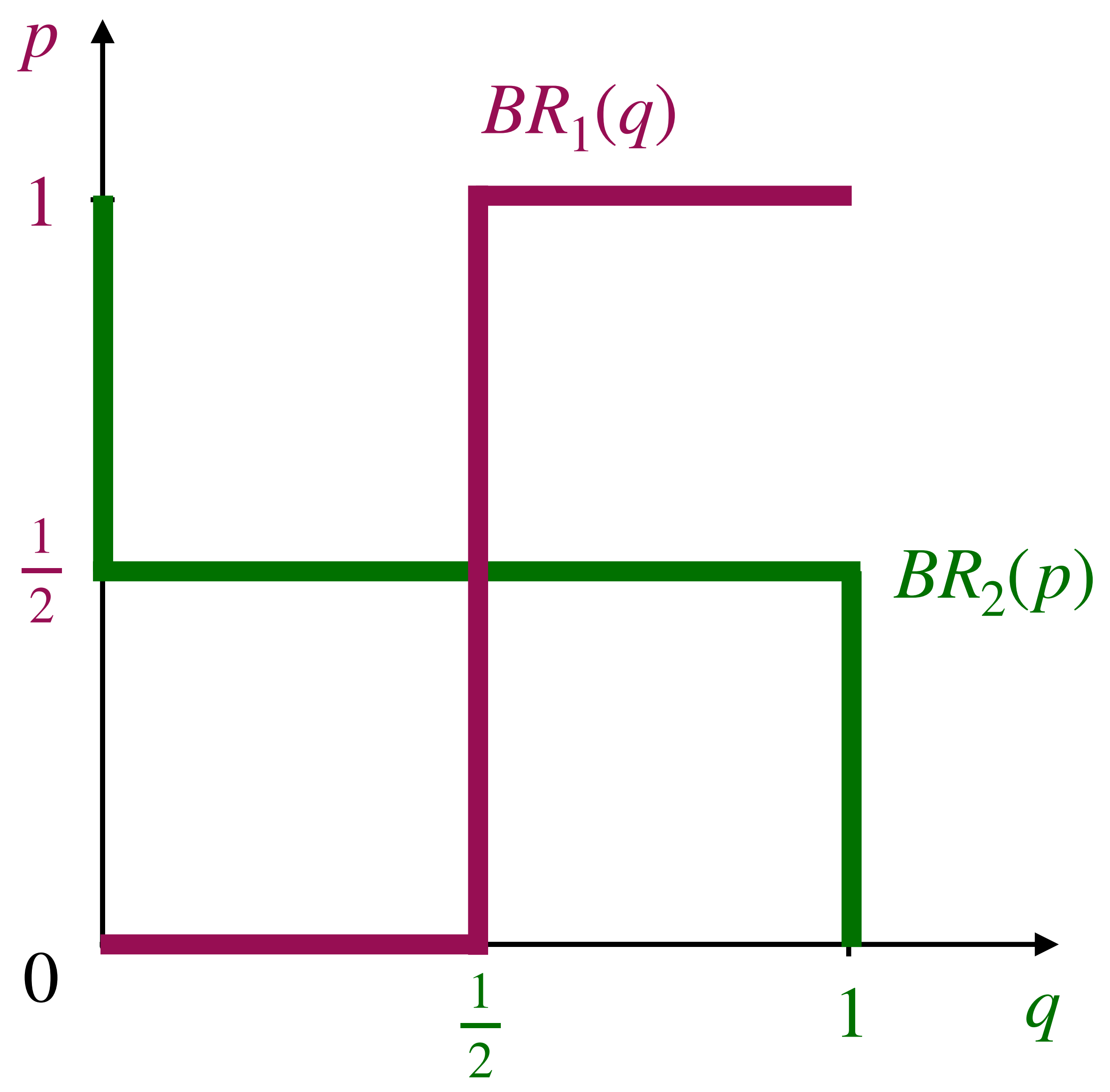
$$\begin{aligned} v_1(H,q) &= q\times 1+(1-q)\times(-1)=2q-1 \\ v_1(T,q) &= q\times(-1)+(1-q)\times 1=1-2q \end{aligned}, \quad \begin{aligned} v_2(p,H) &= p\times(-1)+(1-p)\times 1=1-2p \\ v_2(p,T) &= p\times 1+(1-q)\times(-1)=2p-1 \end{aligned}$$

- 参与人的最优反应对应（best–response correspondence）为：

$$BR_1(q)=\begin{cases} p=0 & \text{if } q<1/2 \\ p\in[0,1] & \text{if } q=1/2 \\ p=1 & \text{if } q>1/2 \end{cases}, \quad BR_2(p)=\begin{cases} q=1 & \text{if } p<1/2 \\ q\in[0,1] & \text{if } p=1/2 \\ q=0 & \text{if } p>1/2 \end{cases}$$

- 满足 $p\in BR_1(q), q\in BR_2(p)$ 的组合 (p,q) 就是纳什均衡。在这个例子中，这个步骤可以通过查看 $BR_1(q)$ 和 $BR_2(p)$ 的交点完成。

  从右图可知，唯一的纳什均衡为 $(1/2, 1/2)$



例题：石头剪子布博弈

石头剪子布博弈

		参与人 2		
		R	*P*	*S*
参与人 1	*R*	0, 0	–1, 1	1, –1
	P	1, –1	0, 0	–1, 1
	S	–1, 1	1, –1	0, 0

- 此博弈中，每个参与人有三个纯策略，因此需要两个变量，并且期望回报函数和最优反应对应会变得非常复杂
- 此时我们可以通过观察博弈的特征，推导纳什均衡需要满足的性质，继而尝试寻找纳什均衡
  - 不存在纯策略纳什均衡
  - 当一个参与人选择纯策略时，任何混合策略都不会成为另一个参与人的最优反应

  纳什均衡只包含混合策略

  - 在纳什均衡中，没有参与人只在两个纯策略中进行混合
    - 可用反证法证明：假设参与人 i 在 R 和 P 中混合 $\Rightarrow$ 则对于参与人 j 来说 $P \succ R$，因此在纳什均衡中 j 选择 R 的概率为零 $\Rightarrow$ 对于参与人 i 来说 $S \succ P$，因此如果 j 不选择 R，则 i 也不会选择 P $\Rightarrow$ 与假设矛盾
  - 此时如果我们猜测 $\sigma_1^* = \sigma_2^* = (1/3, 1/3, 1/3)$ 是一个纳什均衡，则需要证明
    - σ_1^* 和 σ_2^* 互为最优反应：当 i 选择 σ_i^* 时，j 的所有纯策略的期望回报都为 0，因此任意混合策略对于 j 来说都是最优反应
    - (σ_1^*, σ_2^*) 是唯一的纳什均衡：令 $\sigma_i(P) = p \in (0,1)$，$\sigma_i(R) = r \in (0,1)$，$\sigma_i(S) = 1 - p - r \in (0,1)$，则 j 的三个纯策略的期望回报为

      $v_j(R, \sigma_i) = 1 - r - 2p$，$v_j(P, \sigma_i) = 2r + p - 1$，$v_j(S, \sigma_i) = -r + p$，且三个期望回报相等 $\Rightarrow$ 可解出 $p = r = 1/3$

例题：多个纳什均衡

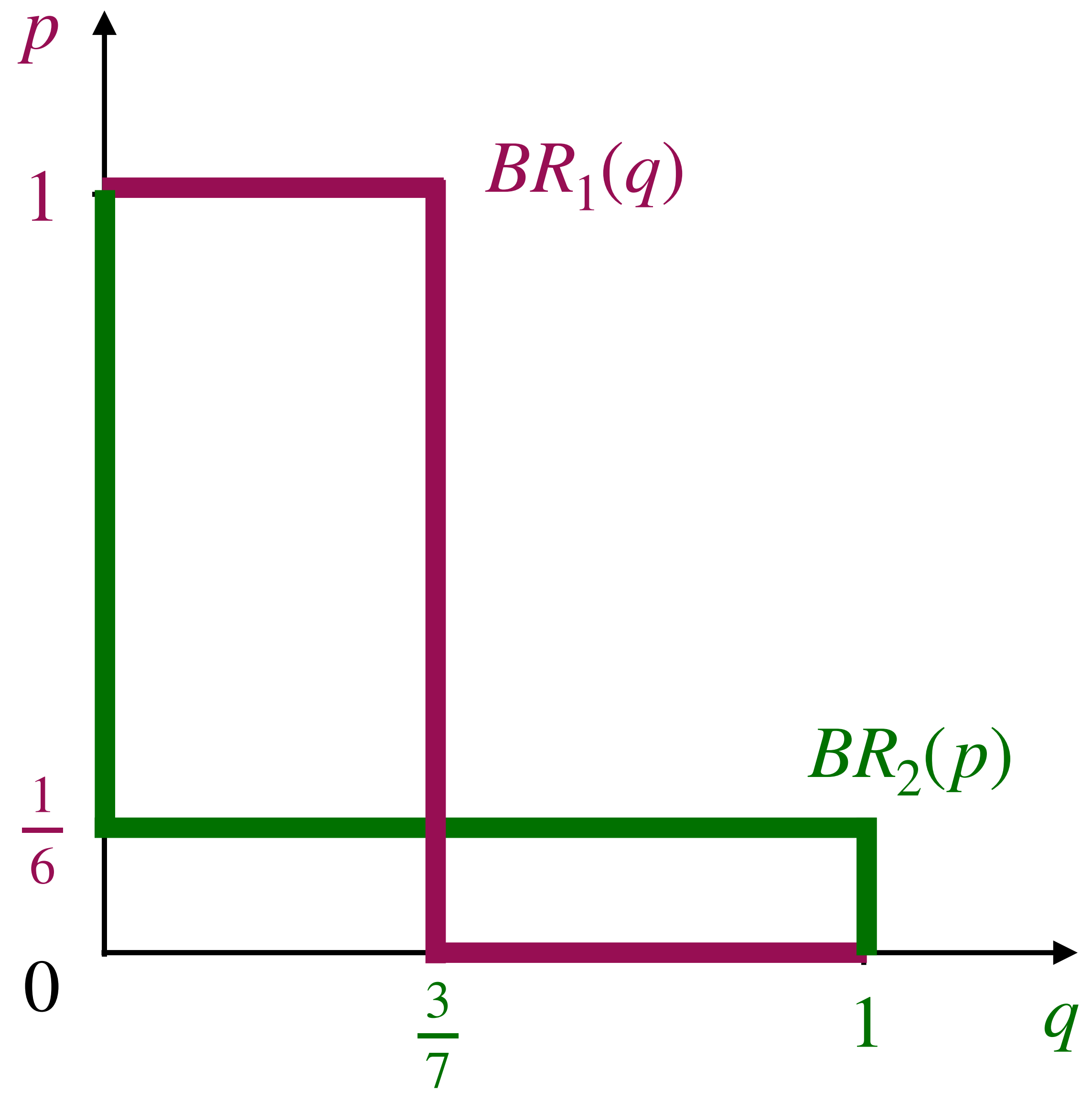
		参与人 2	
		C	R
参与人 1	M	0, 0	<u>3</u>, <u>5</u>
	D	<u>4</u>, <u>4</u>	0, 3

- 考虑右侧的博弈：假设参与人 1 选择 M 的概率为 p，参与人 2 选择 C 的概率为 q
- 混合策略组合 (p, q) 对应的<u>期望回报</u>为：

$$\begin{aligned} v_1(M, q) &= 3(1-q) = 3 - 3q \\ v_1(D, q) &= 4q \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} v_2(p, C) &= 4(1-p) = 4 - 4p \\ v_2(p, R) &= 5p + 3(1-p) = 2p + 3 \end{aligned}$$

- 参与人的<u>最优反应对应</u>为：

$$BR_1(q) = \begin{cases} p = 0 & \text{if } q > 3/7 \\ p \in [0,1] & \text{if } q = 3/7 \\ p = 1 & \text{if } q < 3/7 \end{cases}, \quad BR_2(p) = \begin{cases} q = 0 & \text{if } p > 1/6 \\ q \in [0,1] & \text{if } p = 1/6 \\ q = 1 & \text{if } p < 1/6 \end{cases}$$



- 从右图可知，纳什均衡为 $(1, 0)$, $(1/6, 3/7)$, $(0, 1)$，其中 $(1/6, 3/7)$ 为混合策略

纳什存在性定理

Nash’s existence theorem

纳什存在性定理：任何有限标准式博弈一定存在（混合策略）纳什均衡

有限参与人，每个参与人都拥有有限纯策略集合

- 因为混合策略包含纯策略，因此存在只有一个纯策略纳什均衡的博弈
- 此定理的证明需要用到布劳威尔不动点定理（Brouwer’s fixed-point theorem）或角谷静夫不动点定理（Kakutani’s fixed-point theorem），感兴趣的同学可以阅读第六章第4节

练习：混合策略下的优势与劣势

- 如果参与人 i 的纯策略 $s_i \in S_i$ 严格劣于混合策略 $\sigma_i \in \Delta S_i$，则在任意纳什均衡中，参与人 i 选择 s_i 的概率都为零
- 因此，我们可以通过重复剔除严格劣势策略缩小策略集合，使求纳什均衡的过程简单化

		参与人 2		
		L	*C*	*R*
	T	6, 2	0, 6	4, 4
参与人 1	*M*	2, 12	4, 3	2, 5
	B	0, 6	10, 0	2, 2

- 考虑右面的矩阵博弈，并回答下面的问题：
  1. 证明在任意纳什均衡中，参与人 1 选择 M 的概率为零（M 严格劣于 T 与 B 的混合策略）
  2. 证明在任意纳什均衡中，参与人 2 选择 R 的概率为零（R 严格劣于 L 与 C 的混合策略）
  3. 找到纳什均衡

练习：市场准入

- 三家公司都在考虑是否进入一个新的市场
- 当进入新市场的公司数量为 n 时，每个进入市场的公司获得的利润为 $\frac{150}{n}$
- 进入市场的成本是 62

- 回答下面的问题：
  1. 找到所有的纯策略纳什均衡
  2. 找到对称的混合策略纳什均衡（对称意为三家公司进入市场的概率相同）