博弈论与信息经济学

5. 完全信息动态博弈（二）

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

序贯理性

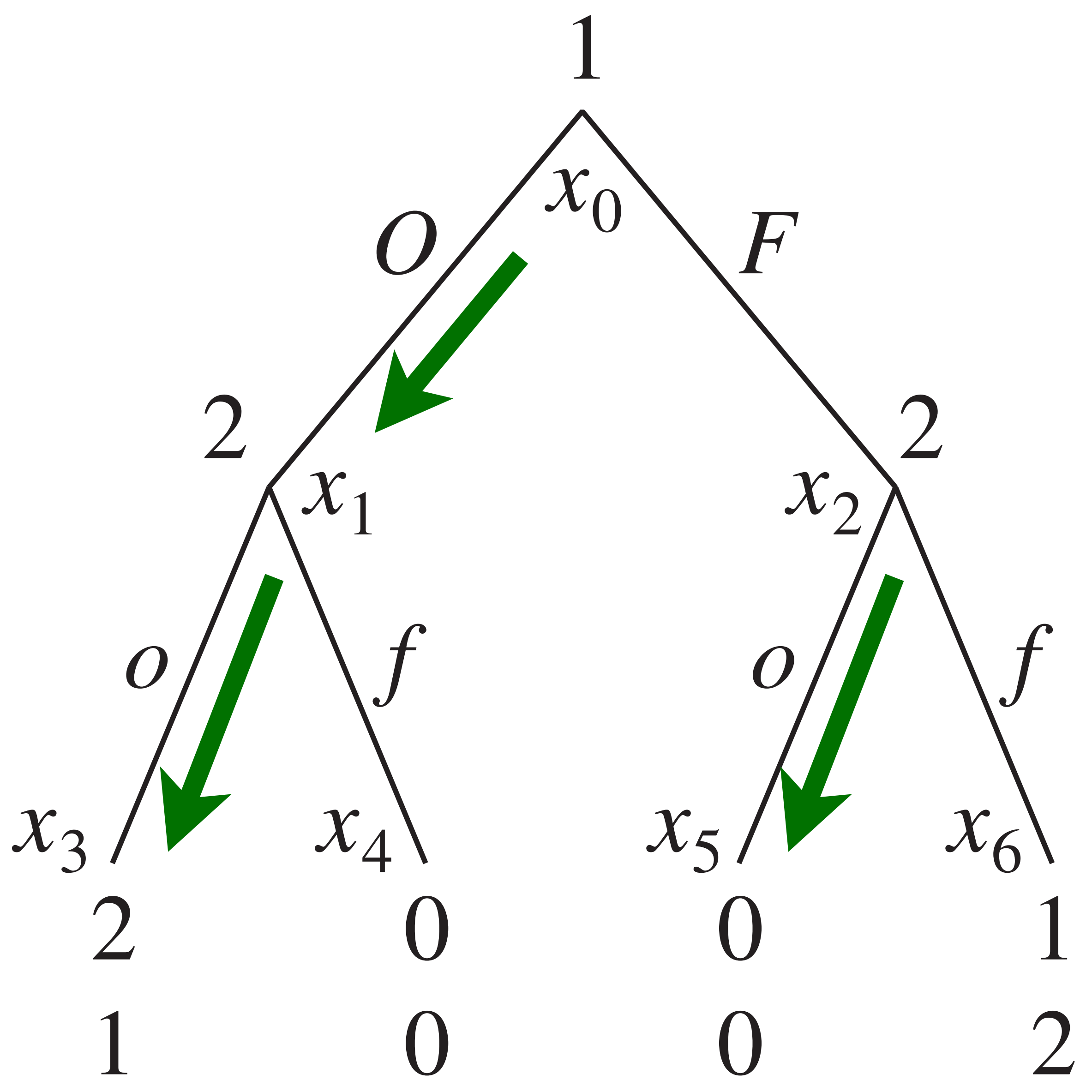
不可信的威胁

Incredible threat

- 序贯行动 BoS 有三个纯策略纳什均衡：
  (O, oo), (O, of), (F, ff)

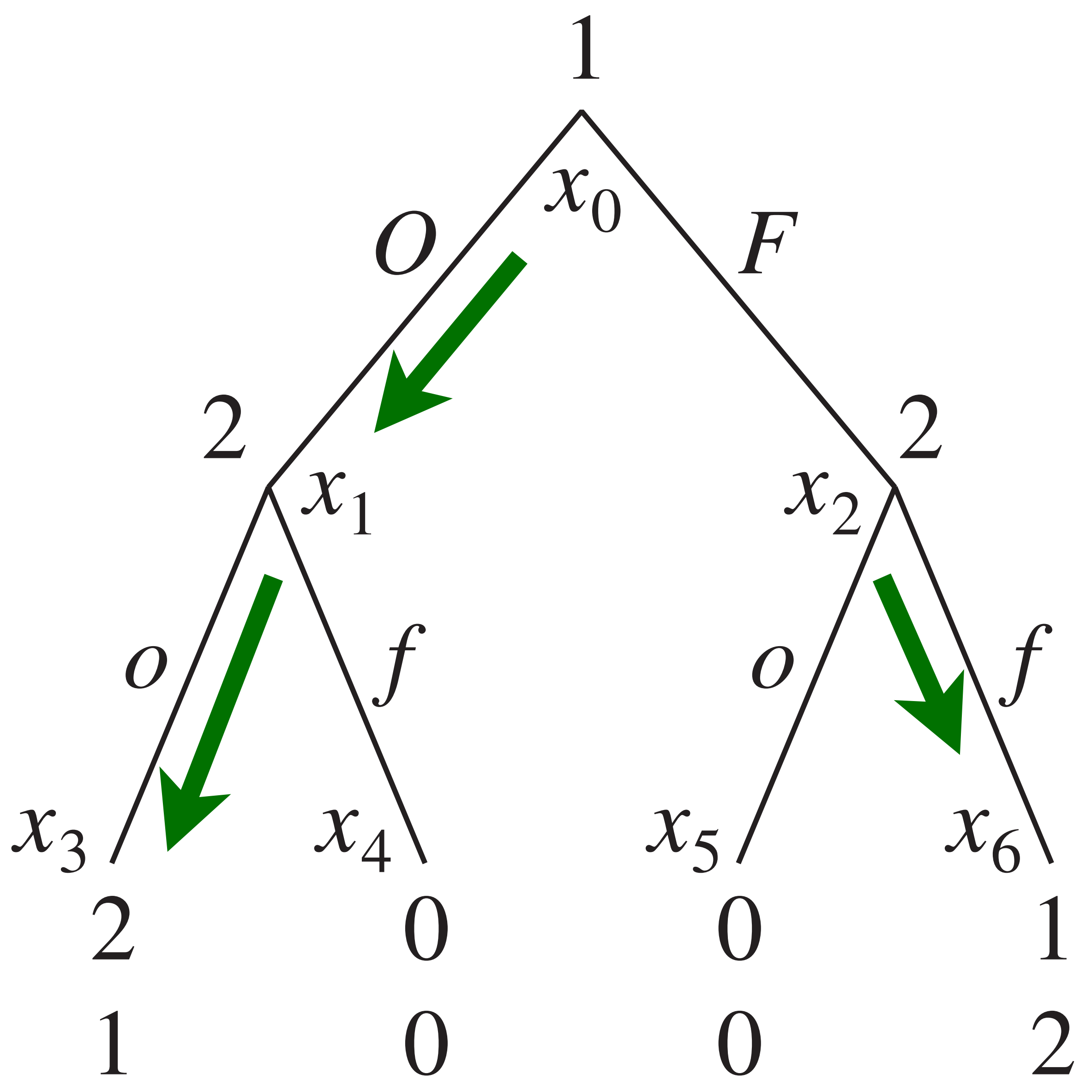
Sequential-move BoS

		参与人 2			
		oo	*of*	*fo*	*ff*
参与人 1	*O*	**<u>2</u>, <u>1</u>**	**<u>2</u>, <u>1</u>**	<u>0</u>, 0	0, 0
	F	0, 0	1, <u>2</u>	<u>0</u>, 0	**<u>1</u>, <u>2</u>**



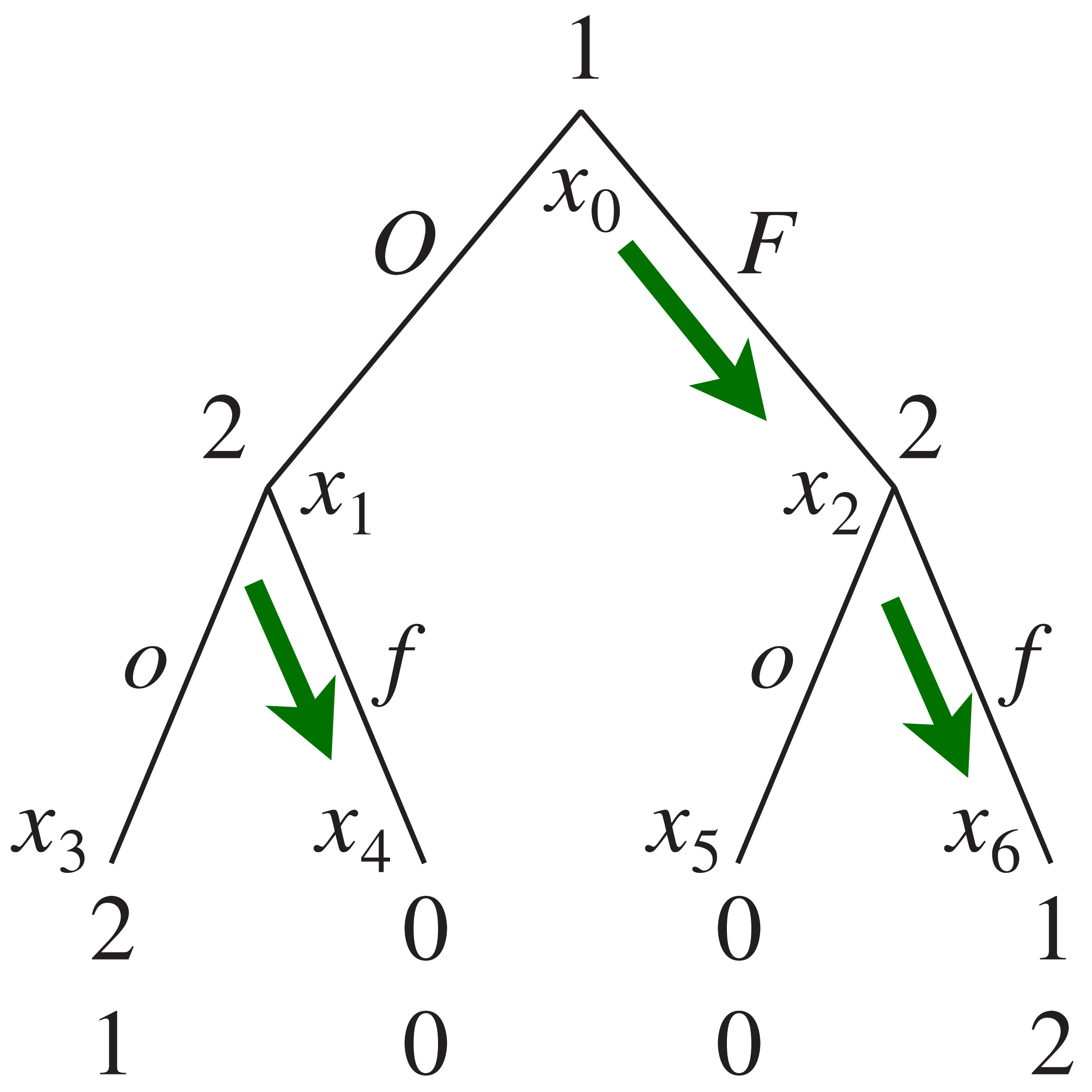
$(O,\ oo)$ 的路径

不可信



$(O,\ of)$ 的路径

可信



$(F,\ ff)$ 的路径

不可信

序贯理性

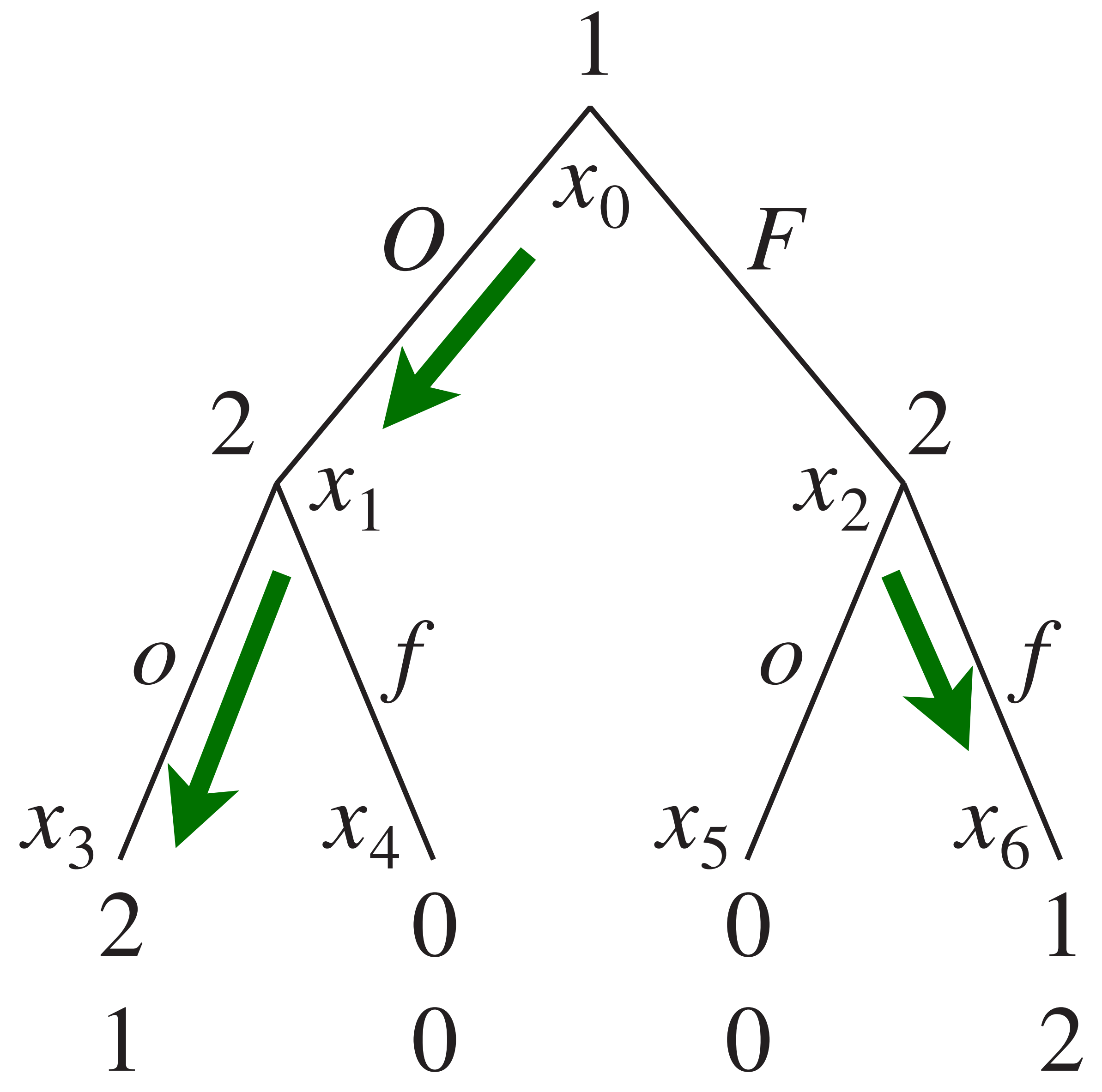
Sequential rationality

- 如果参与人在自己的每一个信息集都做出最优选择，则称之为满足**序贯理性**（sequentially rational）

序贯理性的常用定义出现在第15章。第8章中的定义8.1不准确

- 在序贯行动 BoS 中，只有 (O, of) 中的策略满足序贯理性：
  - 参与人 2 在 x_1 时，o 是最优行动；在 x_2 时，f 是最优行动
  - 参与人 1 可以预见参与人 2 的策略 of，因此 O 是它的最优反应

- 满足序贯理性的纳什均衡不仅能预测均衡路径上的行动，也可以预测均衡路径外的行动



(O, of) 的路径

逆向归纳解

Backward induction solution

- 在扩展式博弈中，逆向归纳法意味着：
  1. 在每个终点前面的节点上，参与人都选择最优行动
  2. 在更前面的节点上，参与人都能预见后面的最优行动，并选择最优反应

- 任意的有限完美信息博弈都存在逆向归纳解，且满足序贯理性。如果对任意参与人 i ，博弈树的所有终点都对应不同的回报，则逆向归纳解是唯一的

- 任意的有限完美信息博弈的逆向归纳解都是纳什均衡，因此有限完美信息博弈一定存在纯策略纳什均衡。如果对任意参与人 i ，博弈树的所有终点都对应不同的回报，则满足序贯理性的纯策略纳什均衡是唯一的

逆向归纳法的适用范围

- 考虑右图中的自愿 BoS 博弈：
  - 参与人 1 首先选择是否进行 BoS 博弈
  - 如果参与人 1 选择不进行（N），则双方的回报为 (1.5, 1.5)
  - 如果参与人 1 选择进行（Y），则双方进行同时行动 BoS

- 这个博弈无法适用逆向归纳法，因为参与人 2 的信息集不是单点，不存在最优纯策略
- 逆向归纳法不适用的博弈包括：
  - 不完美信息博弈（任意信息集包含两个或以上节点，或有“自然”参与）
  - 无法确保在有限回合结束的博弈（可能存在无限多个终点）

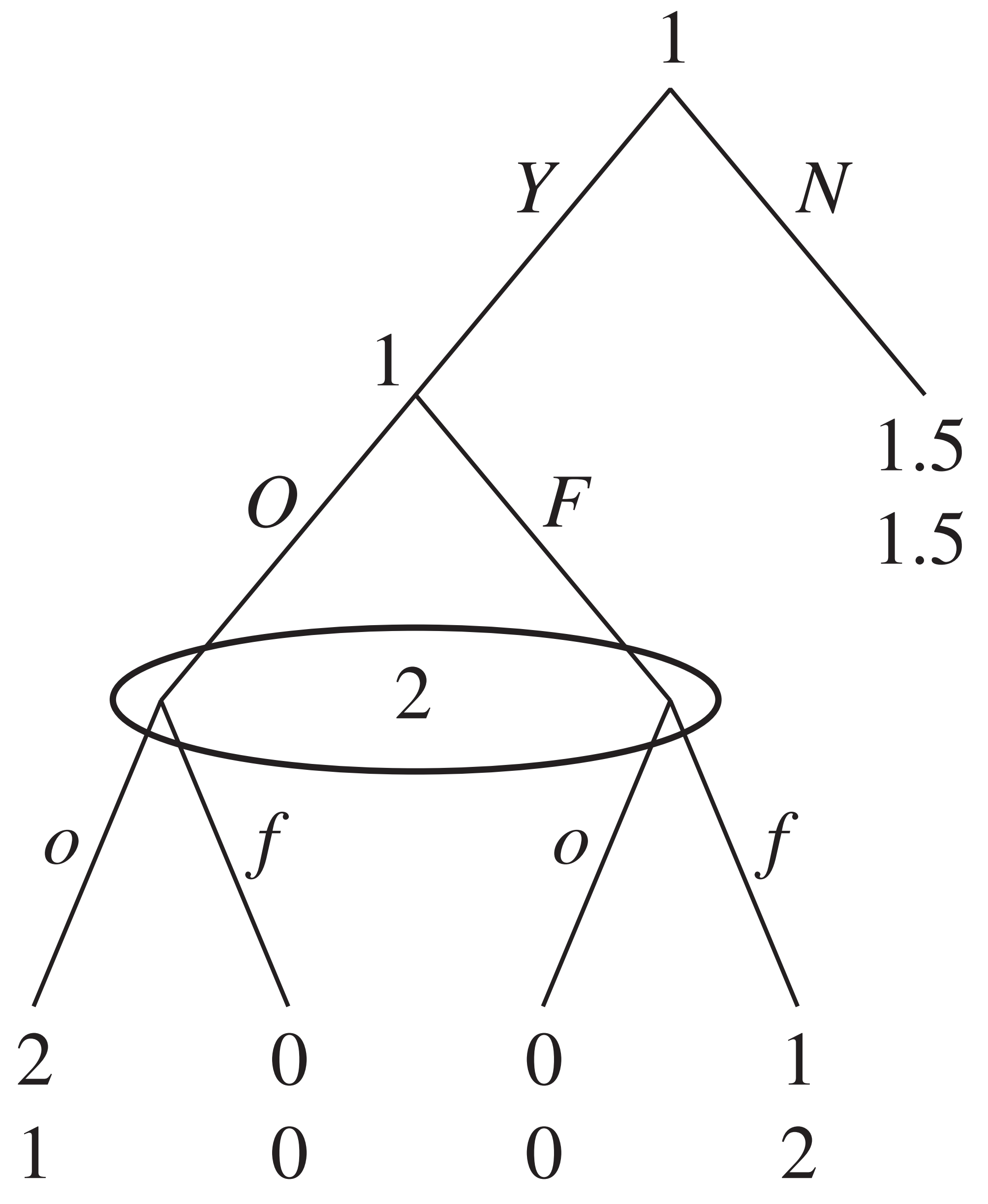


FIGURE 8.2 The voluntary Battle of the Sexes game.

子博弈

Subgame

由扩展式博弈 Γ 中的单个节点及其所有下行节点组成的部分博弈树 G 如果满足

$$x \in G,\, x' \in h(x) \;\Rightarrow\; x' \in G \qquad \text{(}x'\text{ 在 }x\text{ 所在的信息集中，则 }x'\text{ 也在 }G\text{ 中)}$$

则称 G 为 Γ 的子博弈（subgame 或 proper subgame）

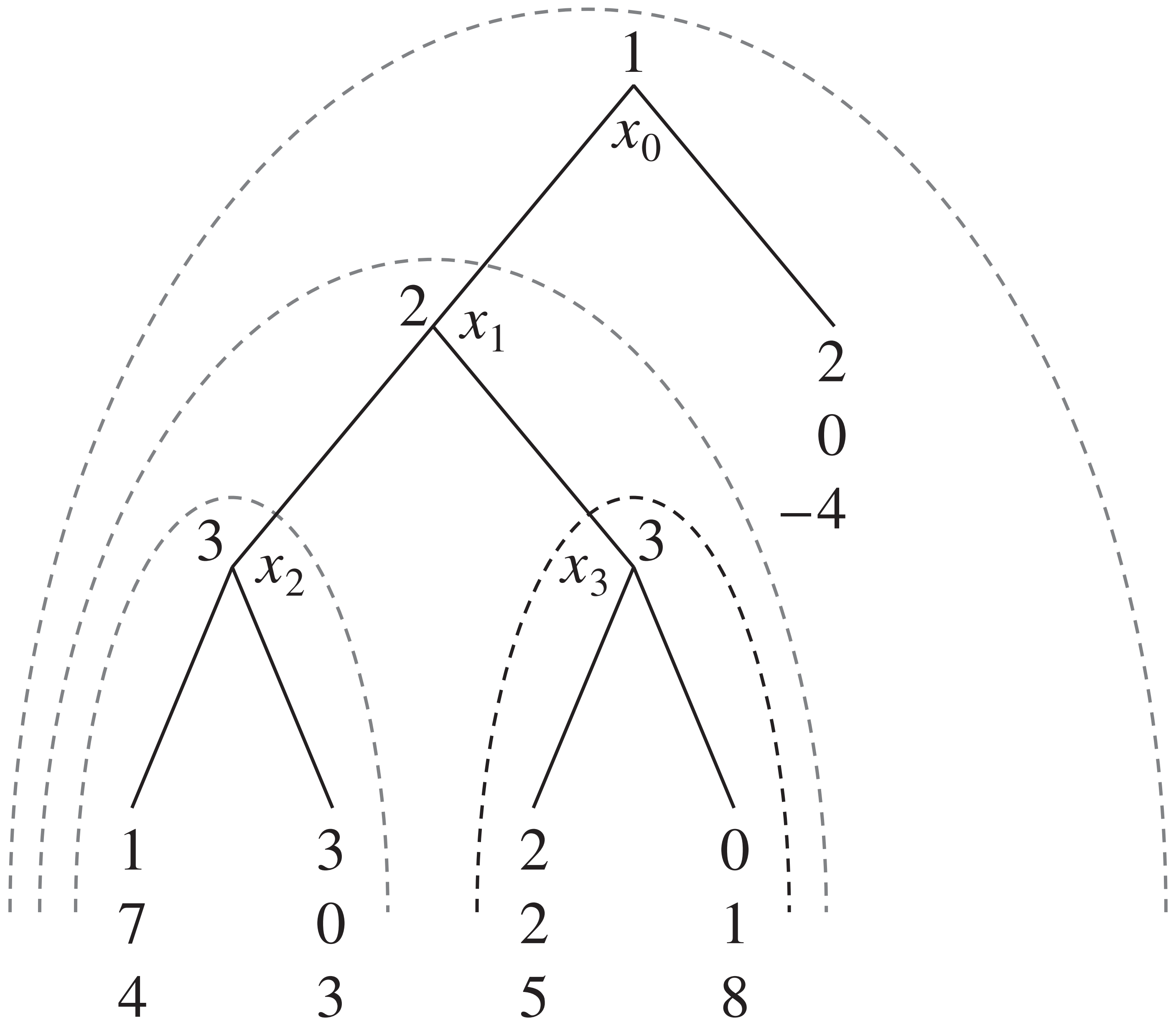


FIGURE 8.3 Subgames in a game with perfect information.

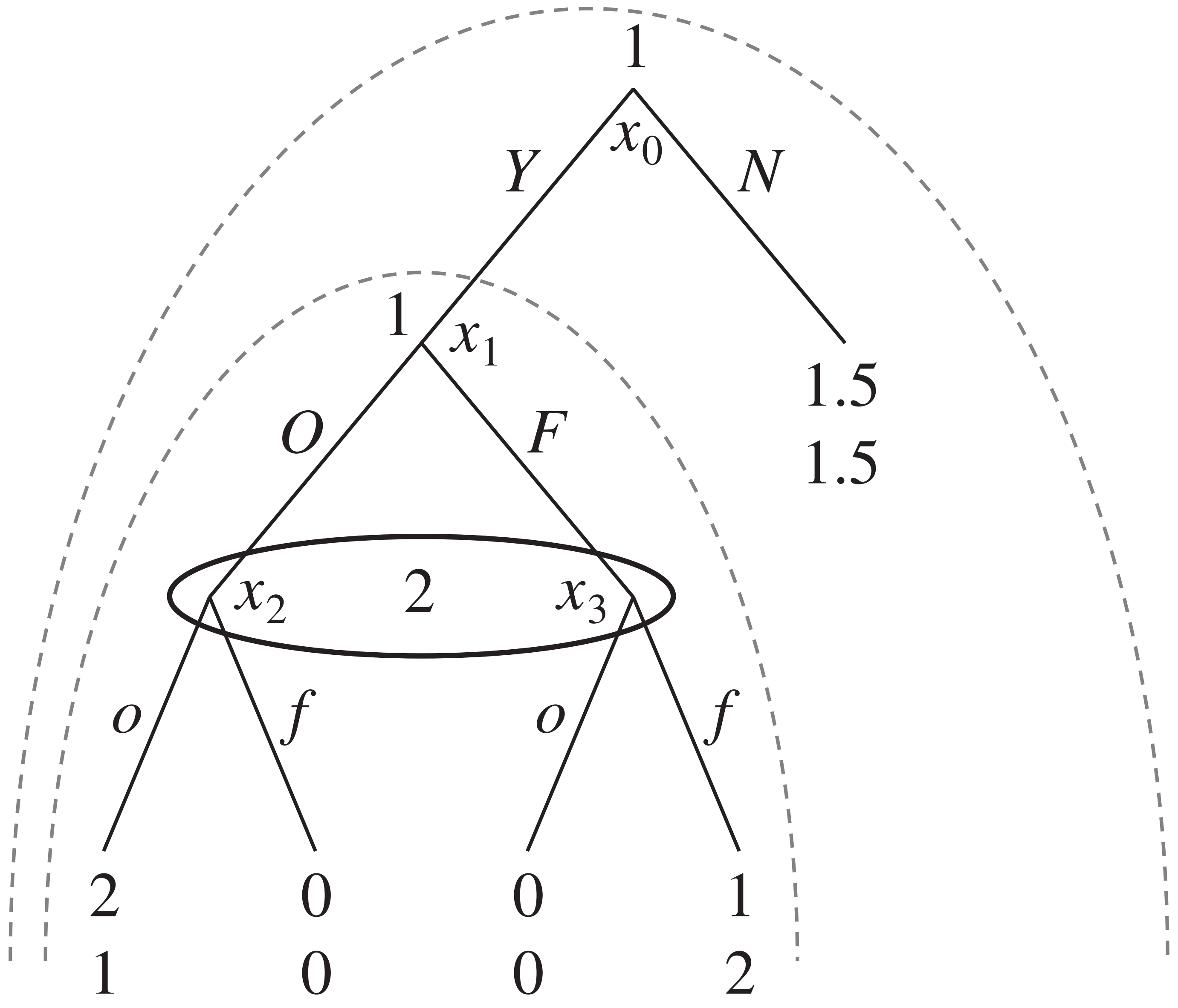


FIGURE 8.4 Proper subgames in the voluntary Battle of the Sexes game.

- 双人参与的比大小游戏
  - 一副扑克牌中仅包含同等数量的 K 和 A
  - 游戏开始前，两个玩家各下注 1 元
  - 玩家 1 抽一张牌，并在看到牌面后选择：
    - 结束（N）：玩家 2 赢得 2 元
    - 继续（Y）：玩家 2 行动
  - 玩家 2 无法看到玩家 1 的牌，他可以选择：
    - 放弃（F）：玩家 1 赢得 2 元
    - 跟注（C）：
      每个玩家各自再加注 1 元并翻牌，
      如果牌面是 K 则玩家 2 赢得 4 元，
      如果是 A 则玩家 1 赢得 4 元

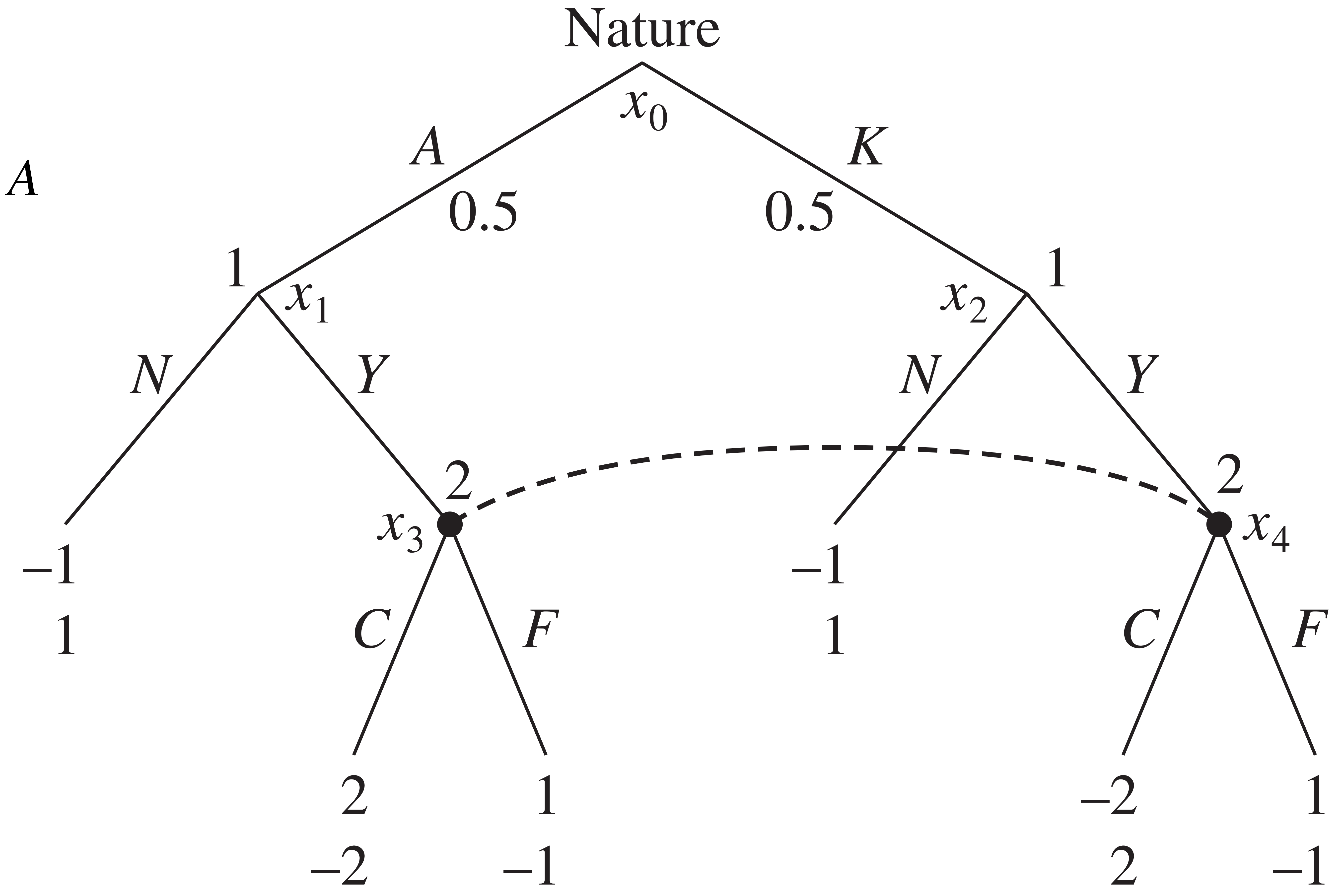


FIGURE 8.5 A game of cards.

唯一子博弈是原博弈自身

子博弈完美纳什均衡

Subgame-perfect Nash equilibrium

- 泽尔腾（Reinhard Selten）在 1975 年提出了子博弈完美纳什均衡的概念，并于 1994 年和海撒尼（John C. Harsanyi）、纳什（John F. Nash Jr.）一起获得诺贝尔经济学奖，获奖理由为“对非合作博弈的均衡分析的开创性贡献”

令 Γ 为 n 人扩展式博弈。如果行为策略 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 在 Γ 的任意子博弈 G 上都是纳什均衡，则称 σ^* 为**子博弈完美（纳什）均衡（subgame-perfect (Nash) equilibrium）**，可简写为 SPE

- SPE 要求均衡策略在那些偏离了均衡路径的子博弈上也要是纳什均衡
- 对于有限完美信息博弈，纯策略 SPE 等价于逆向归纳纳什均衡
- SPE 将纳什均衡的集合缩小了，因此称之为纳什均衡的一种精炼（refinement）

定理（Selten）：任意有限完美回忆博弈都存在子博弈完美均衡

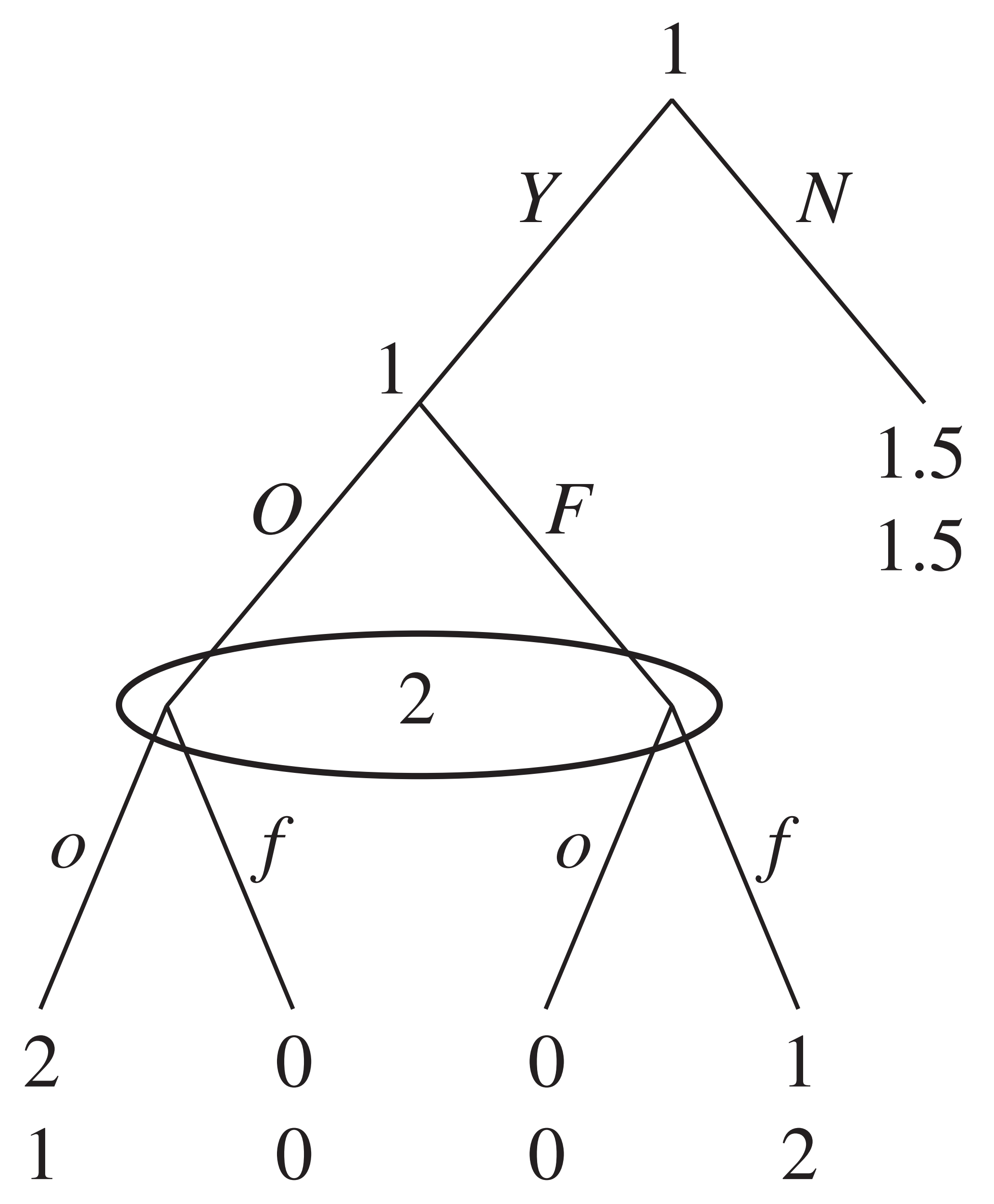


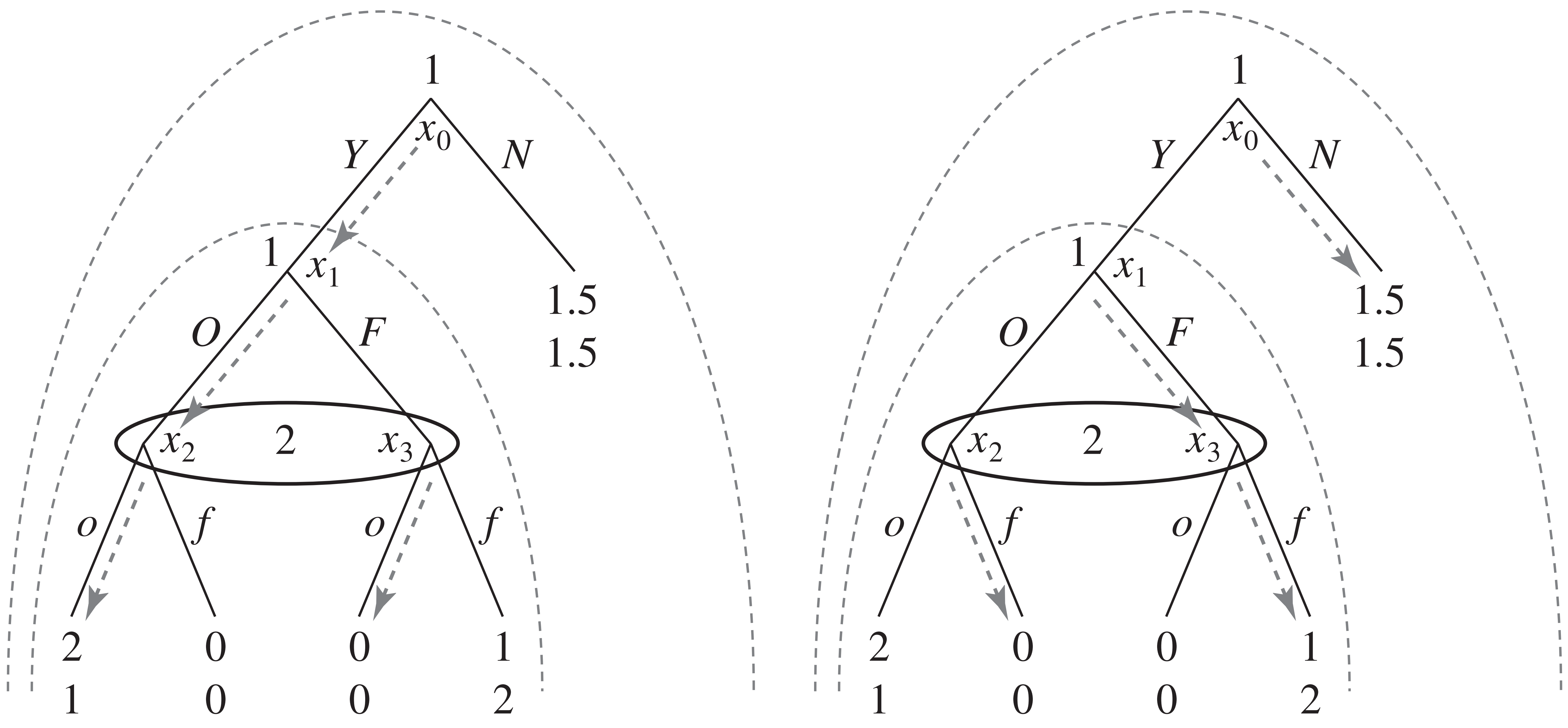
FIGURE 8.2 The voluntary Battle of the Sexes game.

Voluntary BoS

参与人 2

参与人 1		o	f
	YO	**2, 1**	0, 0
	YF	0, 0	1, 2
	NO	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**
	NF	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**

- 纯策略纳什均衡为：
  $(YO, o), (NO, f), (NF, f)$
- 其中 SPE 为：
  $(YO, o), (NF, f)$



蜈蚣博弈

The centipede game

- 如图所示，根据逆向归纳法，
  - 参与人 2 在最终回合应当选择 n
  - ⇒ 参与人 1 在第三回合应当选择 N
  - ⇒ 参与人 2 在第二回合应当选择 n
  - ⇒ 参与人 1 在第一回合应当选择 N

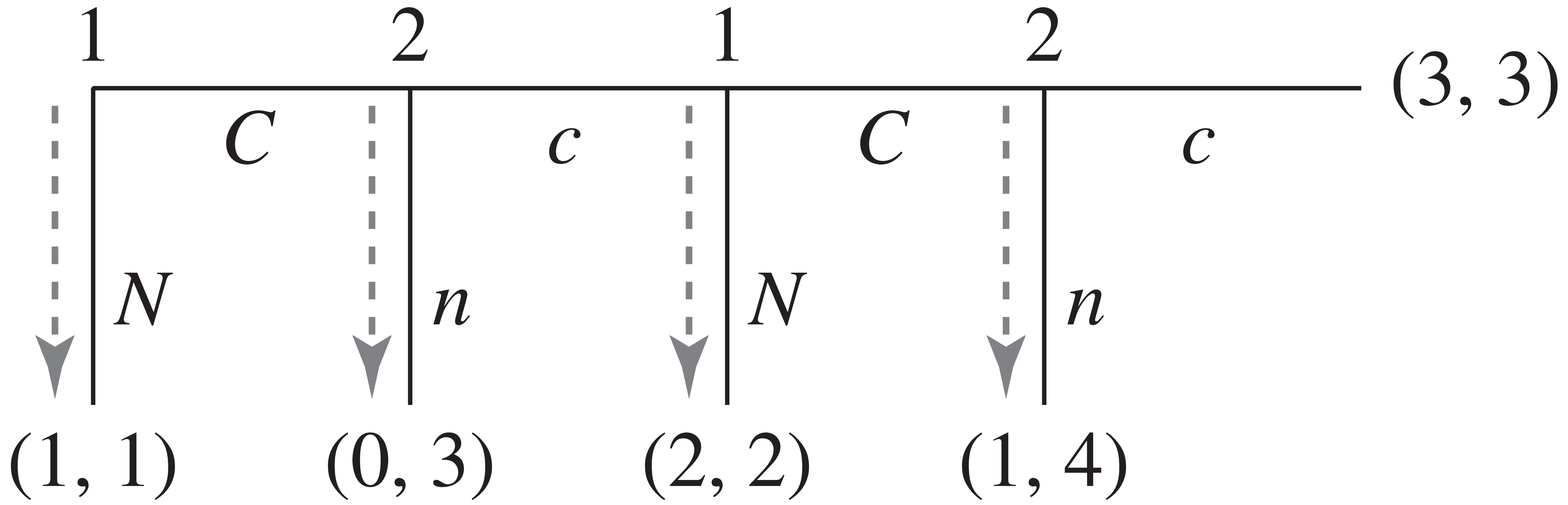


FIGURE 8.8 The Centipede Game.

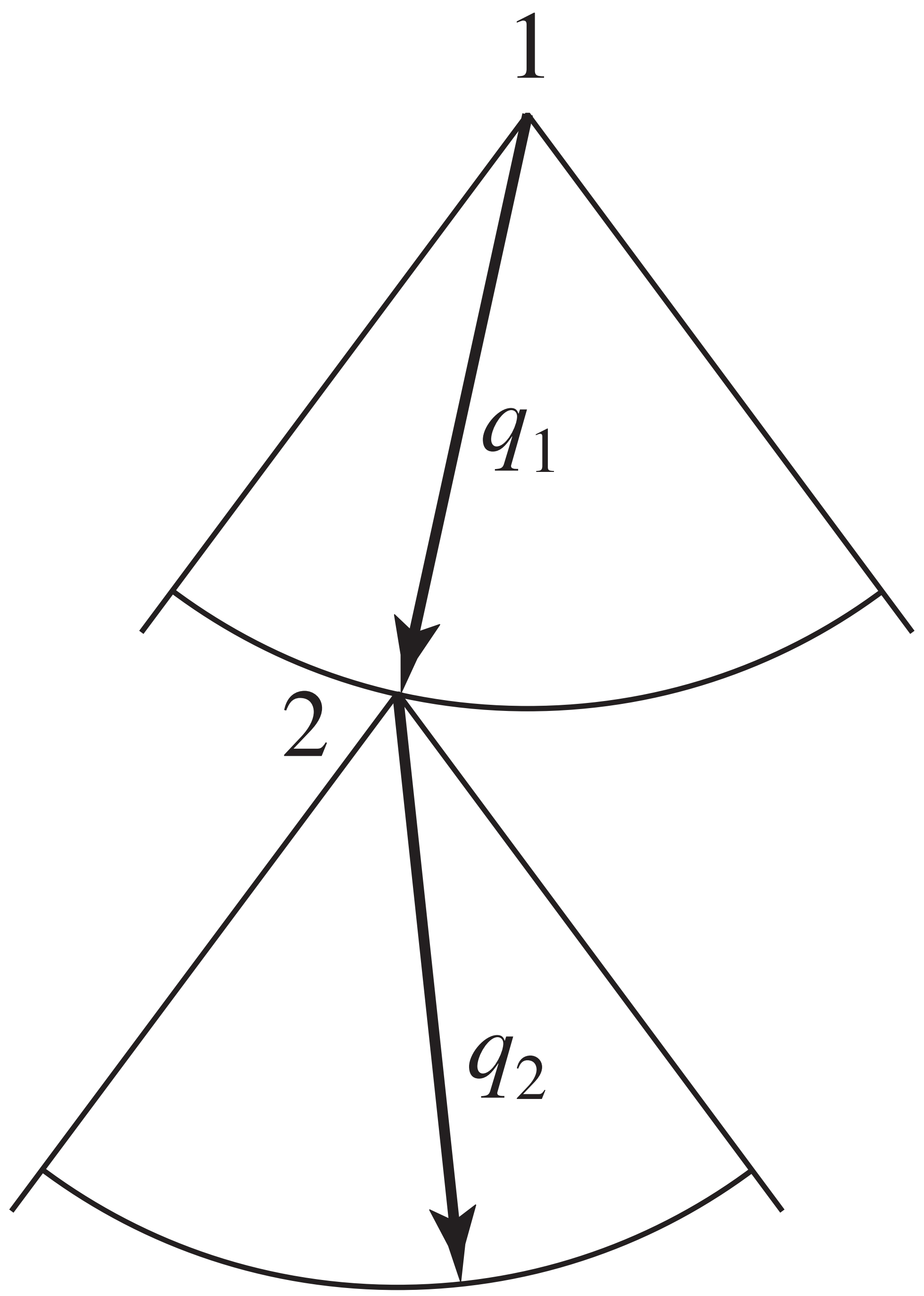
- <u>逆向归纳纳什均衡</u>为 (NN, nn)，结果是参与人 1 在第一回合选择 N，双方的回报为 $(1, 1)$
- 此博弈可以拓展为 $2k$ 回合，参与人 1 在第 $2i-1$ 回合行动，如果选择 N 则回报为 (i, i)，如果选择 C 则博弈继续；参与人 2 在第 $2i$ 回合行动，如果选择 n 则回报为 $(i-1, i+2)$，如果选择 c 则博弈继续，如果在最终回合选择 c 则回报为 $(k+1, k+1)$
- 最终回合参与人 2 选择 c 带来的回报是帕累托最优结果，且帕累托优于纳什均衡的结果 $(1, 1)$

斯塔克尔伯格竞争模型

Stackelberg competition

- 斯塔克尔伯格竞争模型是古诺双寡头模型的序贯行动版
- 需求函数 $p = 100 - q_1 - q_2$，可变成本 $c(q_i) = 10q_i$
- 假设参与人 1 首先选择产量 q_1，参与人 2 在观察到 q_1 后选择自己的产量 q_2

- 逆向归纳解
  - 在已知 q_1 的情况下，参与人 2 选择令利润 $(100 - q_1 - q_2)q_2 - 10q_2$ 最大的产量 q_2，即 $q_2^* = (90 - q_1)\big/2$
  - 参与人 1 选择令利润 $(100 - q_1 - q_2^*)q_1 - 10q_1$ 最大的产量 q_1，即 $q_1^* = 45$
  - $\Rightarrow\ \ q_2^* = 22.5 \quad \Rightarrow$ 回报为 (1012.5, 506.25)
- 古诺模型下的纳什均衡为 $(q_1^*, q_2^*) = (30, 30) \ \ \Rightarrow$ 回报为 (900, 900)
  斯塔克尔伯格模型解释了先行者优势（first-mover advantage）



$(100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1$
$(100 - q_1 - q_2)q_2 - 10q_2$

斯塔克尔伯格竞争模型

Stackelberg competition

- 逆向归纳解也是 SPE（确认 $q_1 = 45$ 不是 $q_2 = 22.5$ 的最优反应）
- 注意：$(q_1, q_2) = (45, 22.5)$ 不是 SPE 的正确写法，而应该写成

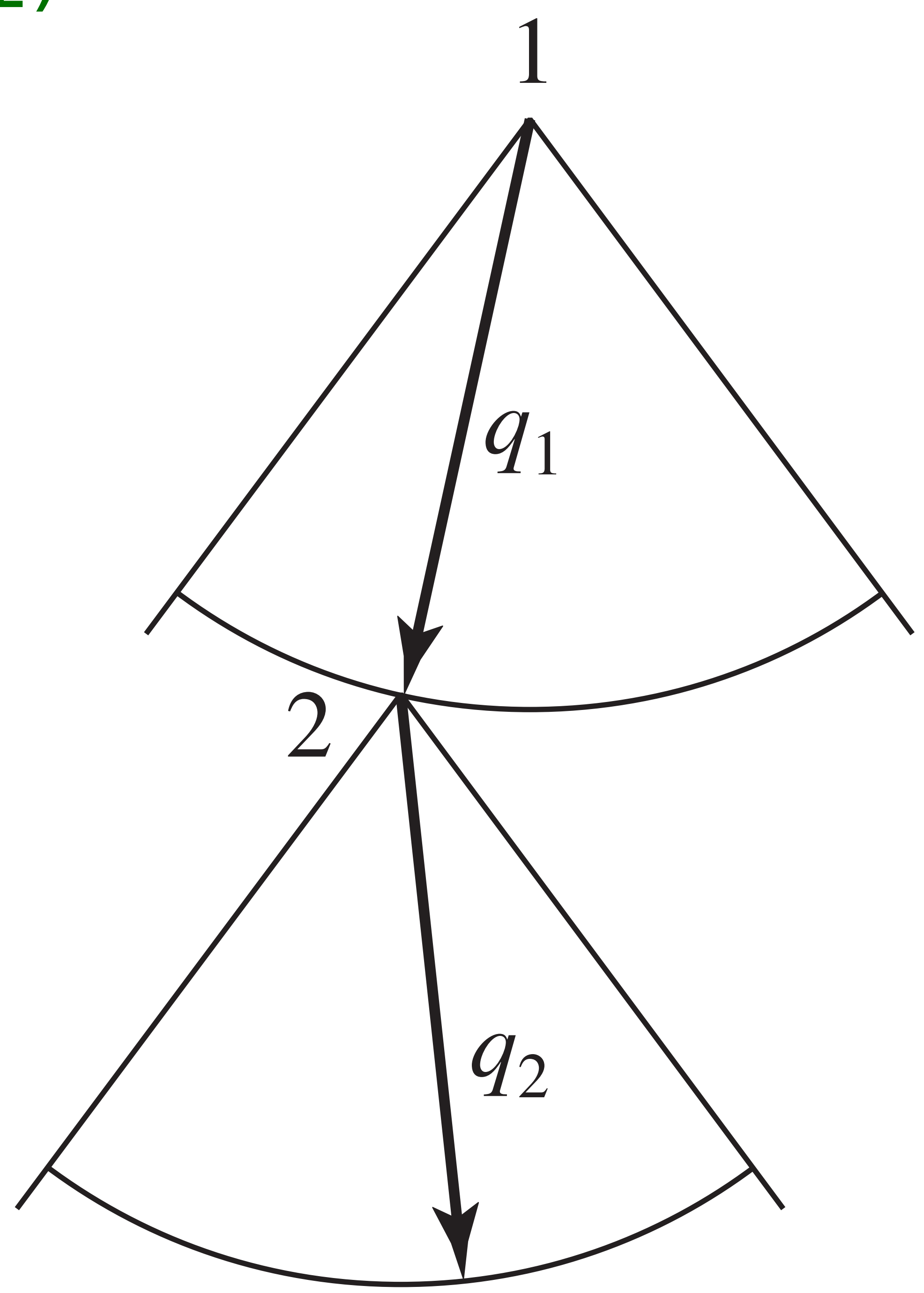
$$(q_1, q_2) = \left(45, \frac{90 - q_1}{2}\right)$$

因为对于参与人 2，每一个可能的 q_1 都对应一个子博弈

- $(q_1, q_2) = (30, 30)$ 在斯塔克尔伯格模型中也是纳什均衡！
- 存在无限多个纳什均衡！例如，

$$q_1 = c \in [0, 90],\quad q_2 = \begin{cases} (90-c)/2 & \text{if } q_1 = c \\ 100 & \text{if } q_1 \neq c \end{cases}$$

（确认当 $c = 40$ 时，此策略是纳什均衡）



$(100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1$
$(100 - q_1 - q_2)q_2 - 10q_2$

同归于尽博弈

Mutually assured destruction

- 假设两个国家间发生冲突，其中国家 2 首先攻击了国家 1
- 关于两国今后的策略选择可以考虑右图中的博弈：
  1. 国家 1 可以选择息事宁人 I 或备战 E
  2. 如果国家 1 选择备战，国家 2 可以选择让步 B，或进一步升级冲突 N
  3. 如果国家 2 选择升级冲突，则双方进行同时行动博弈
     国家 1 可以选择让步 R 或战争 D
     国家 2 可以选择让步 r 或战争 d

     如果双方都选择攻击，则会两败俱伤，给双方造成不可挽回的损失
- 此博弈为非完美信息博弈

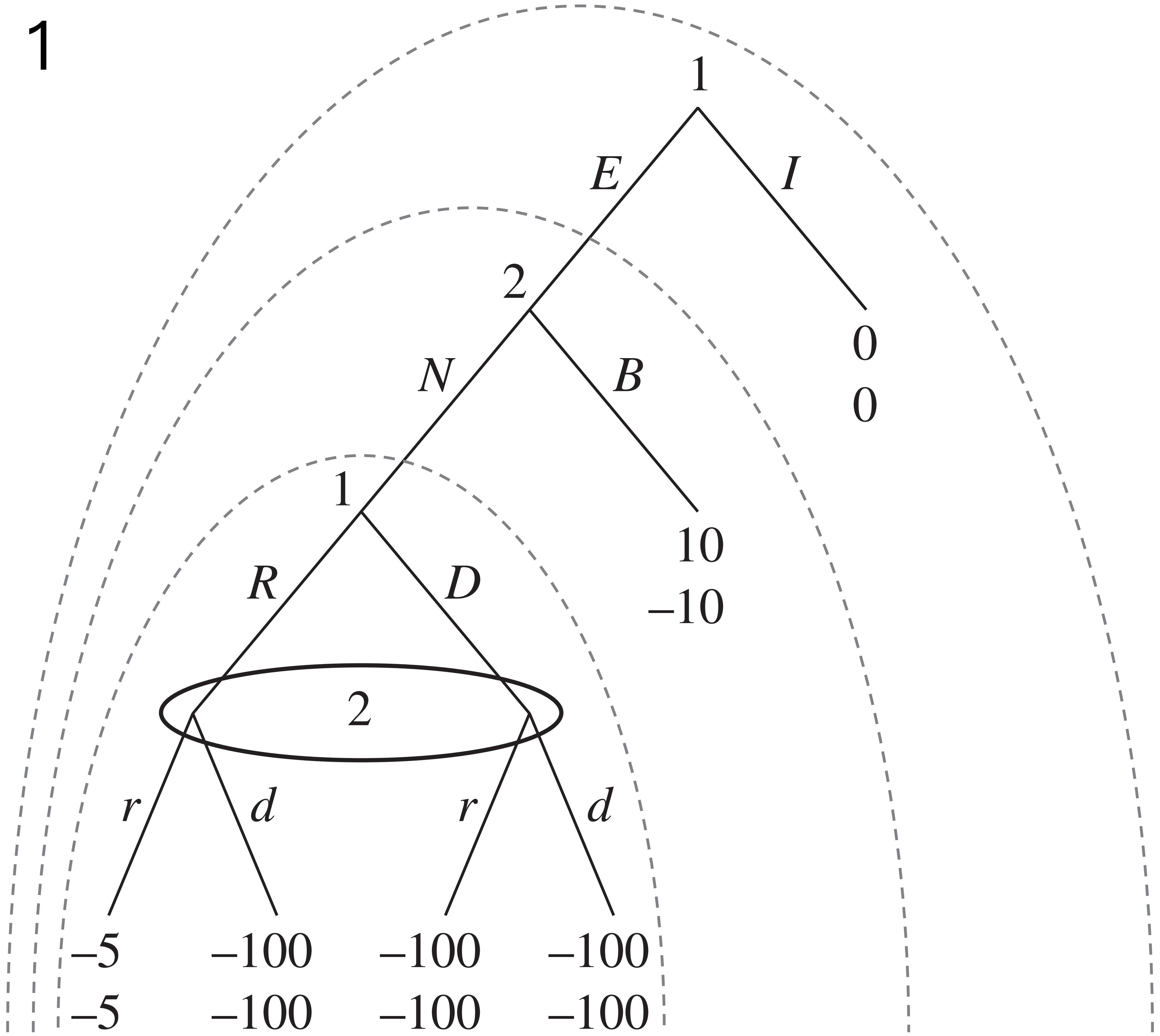


FIGURE 8.11 Mutually assured destruction.

同归于尽博弈

Mutually assured destruction

- 首先，我们尝试找出纯策略纳什均衡

国家 2

		Br	Bd	Nr	Nd
国家 1	IR	0, 0	0, 0	**0, 0**	**0, 0**
	ID	0, 0	0, 0	**0, 0**	**0, 0**
	ER	10, –10	10, –10	–5, –5	–100, –100
	ED	**10, –10**	**10, –10**	–100, –100	–100, –100

纯策略纳什均衡包括：(IR, Nr), (IR, Nd), (IR, Nr), (ID, Nd), (ED, Br), (ED, Bd)

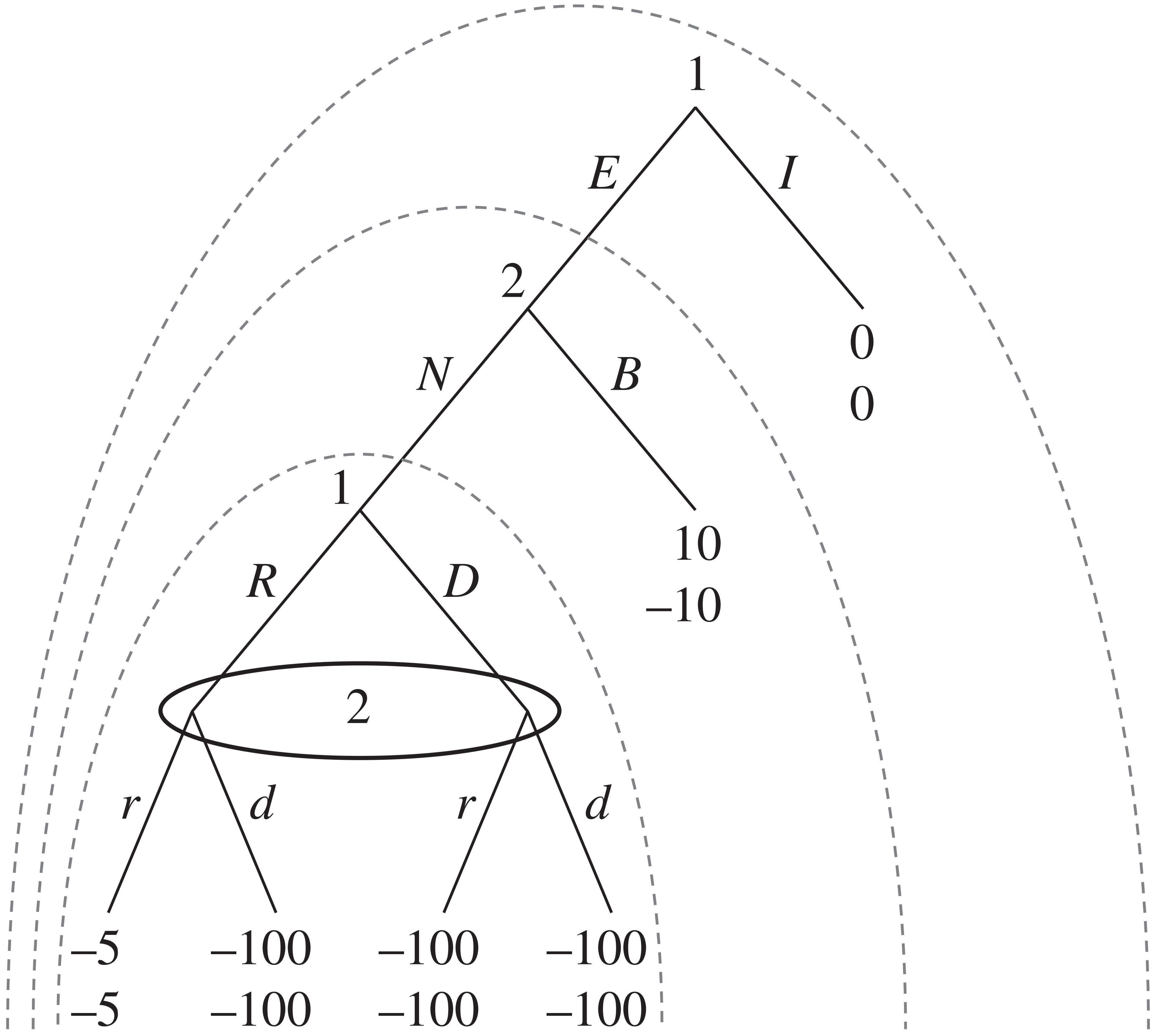


FIGURE 8.11 Mutually assured destruction.

同归于尽博弈

Mutually assured destruction

- 从纯策略纳什均衡 (IR, Nr), (IR, Nd), (IR, Nr), (ID, Nd), (ED, Br), (ED, Bd) 中找出子博弈完美均衡
- 共有三个子博弈（如右图中所示）
  - 子博弈 A 的纳什均衡为：(R, r), (D, d)

		国家 2	
		r	*d*
国家 1	*R*	**$\underline{-5}$, $\underline{-5}$**	$\underline{-100}$, -100
	D	-100, $\underline{-100}$	**$\underline{-100}$, $\underline{-100}$**

  - 子博弈 B 和 C 中，双方可以考虑两种情形：
    1. 双方在子博弈 A 中选择均衡 (R, r)
    2. 双方在子博弈 A 中选择均衡 (D, d)

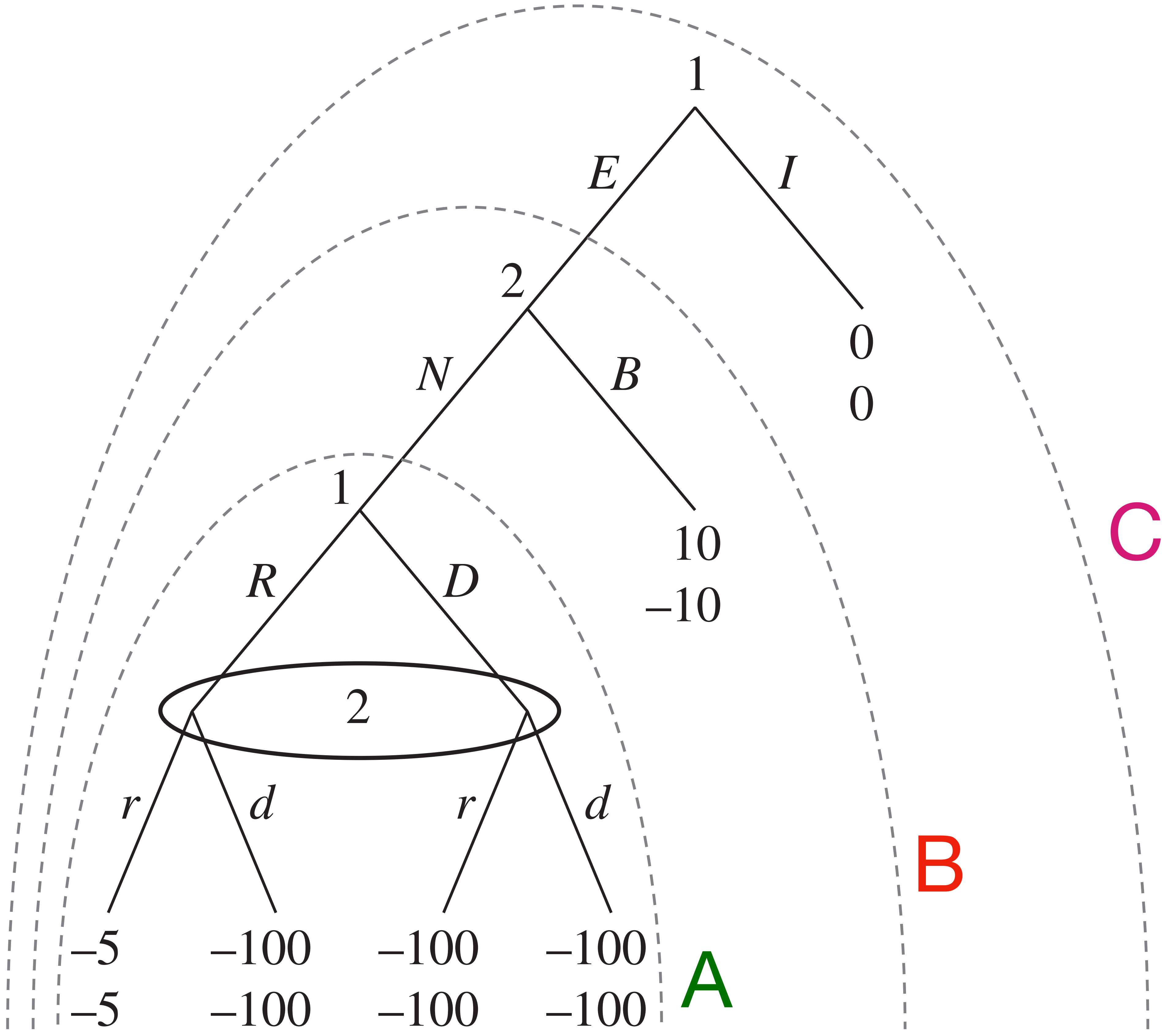


FIGURE 8.11 Mutually assured destruction.

同归于尽博弈

Mutually assured destruction

- 子博弈 B 和 C 中，
  1. 双方在子博弈 A 中选择均衡 (R, r)

     此时，国家 2 在子博弈 B 中的最优对应是 N,
     国家 1 在子博弈 C 中的最优对应是 I

  2. 双方在子博弈 A 中选择均衡 (D, d)

     此时，国家 2 在子博弈 B 中的最优对应是 B,
     国家 1 在子博弈 C 中的最优对应是 E

- 因此，SPE 包括 (IR, Nr), (ED, Bd)
- (IR, Nr) 的均衡路径为国家 1 在第一时间选择息事宁人
- (ED, Bd) 的均衡路径为国家 1 开始备战后，国家 2 预见到同归于尽的结局，因此选择了让步并支付较少的赔偿

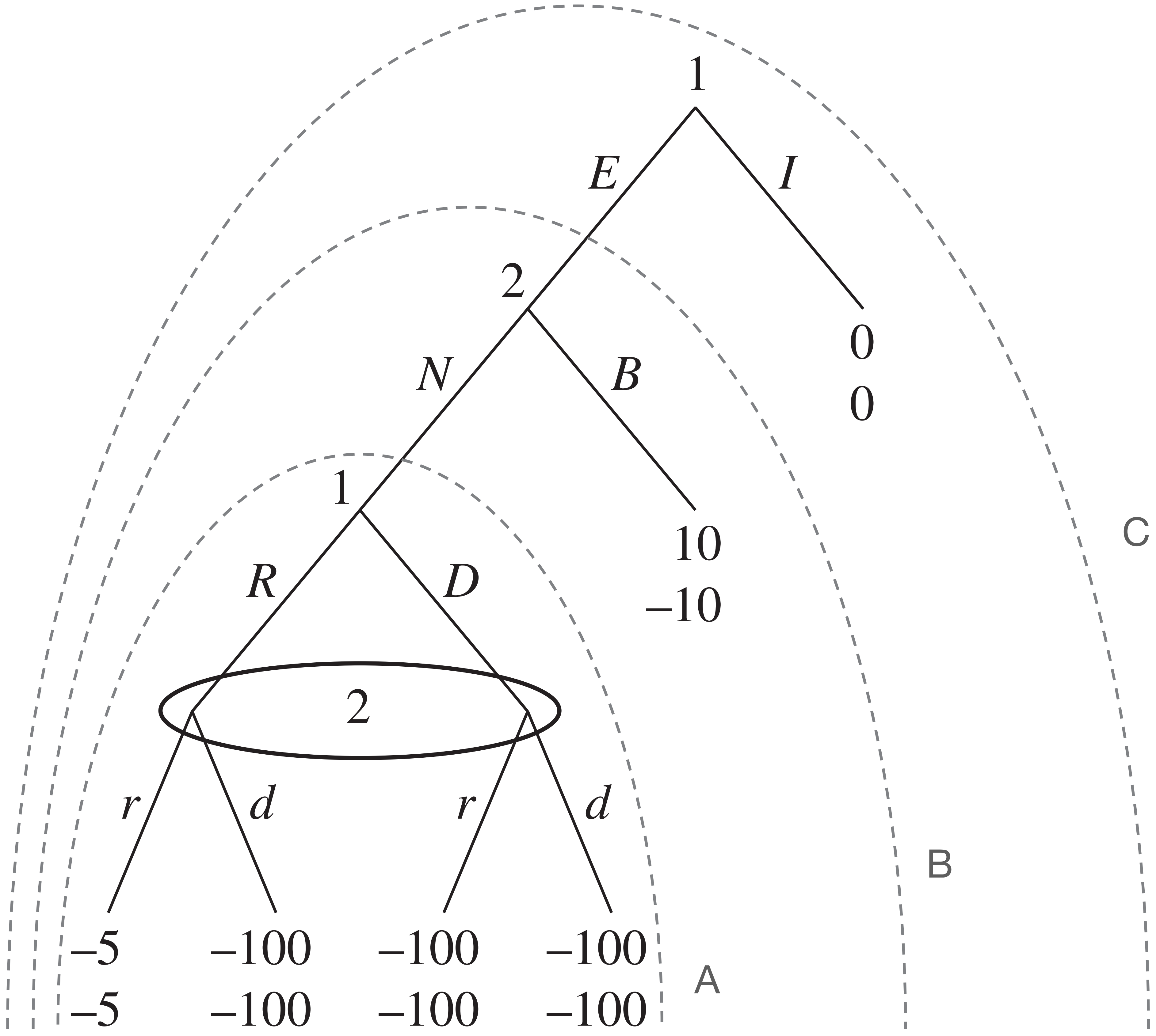


FIGURE 8.11 Mutually assured destruction.

练习：混合策略 SPE

- 考虑自愿 BoS 博弈，并回答下列问题
  1. 找到所有的混合策略纳什均衡
  2. 找到唯一混合策略 SPE

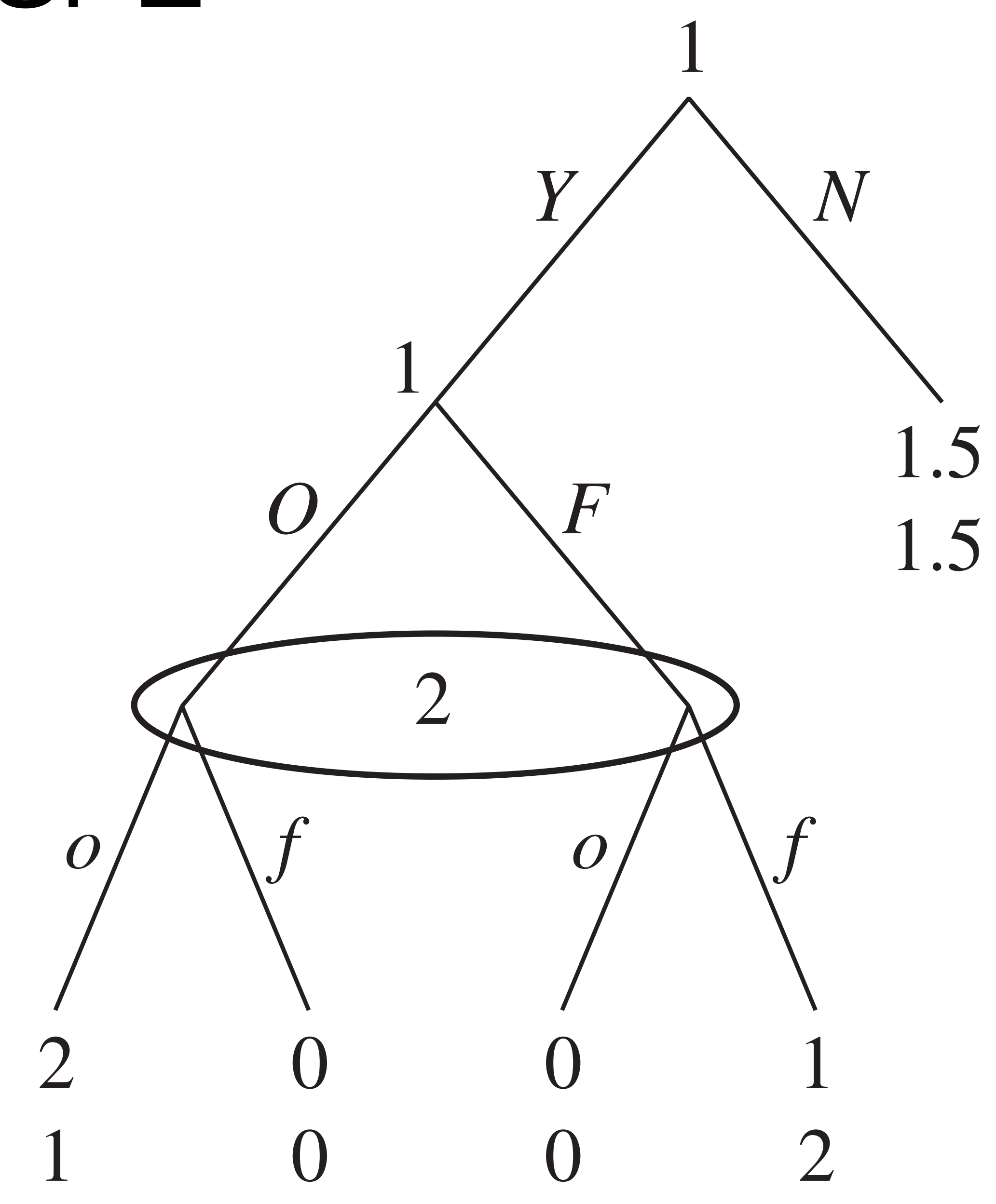


FIGURE 8.2 The voluntary Battle of the Sexes game.

Voluntary BoS

		参与人 2	
		o	*f*
参与人 1	*YO*	**2, 1**	0, 0
	YF	0, 0	1, 2
	NO	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**
	NF	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**

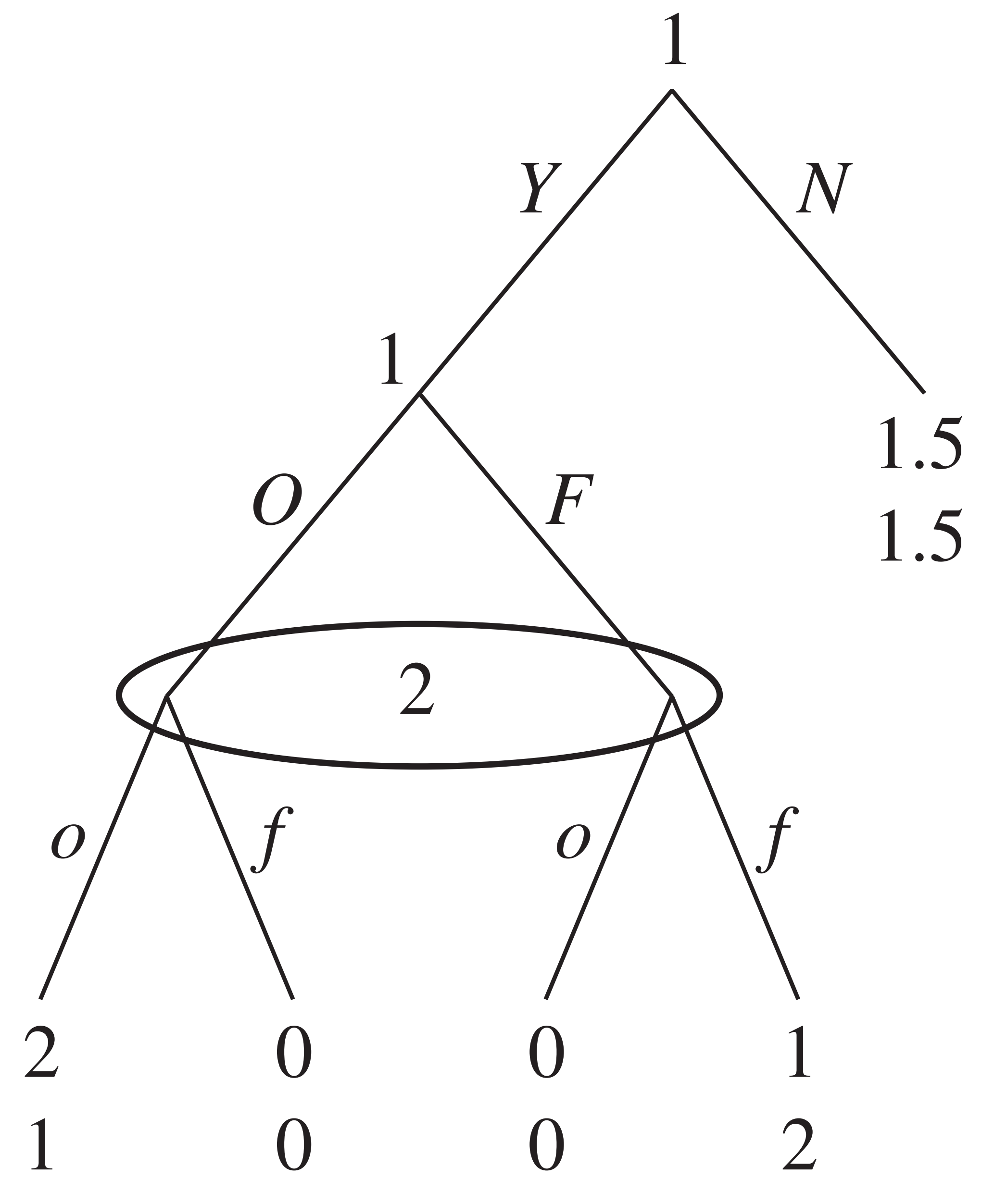


FIGURE 8.2 The voluntary Battle of the Sexes game.

Voluntary BoS

		参与人 2	
		o	*f*
参与人 1	*YO*	**2, 1**	0, 0
	~~*YF*~~	~~0, 0~~	~~1, 2~~
	NO	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**
	NF	1.5, 1.5	**1.5, 1.5**

- 混合策略纳什均衡
  - 对于参与人 1，策略 YF 严格劣于 NO 和 NF，因此可以将其剔除
  - 令参与人 1 的策略为 $(p, q, 1-p-q)$，参与人 2 的策略为 $(s, 1-s)$，则纳什均衡为 $(p=1, s=1)$，$(p=0, s\leq 3/4)$，其中前者为 (YO, o)，后者包含 (NO, f) 和 (NF, f)
  - BoS 子博弈的混合策略纳什均衡为 $(2/3, 1/3)$
  - 混合策略 SPE 为 $(p=0, q=2/3, s=1/3)$，或 $\big((0, 0, 2/3, 1/3), (1/3, 2/3)\big)$

课后练习：兄弟间的博弈

- 兄弟俩针对看电影进行下面的博弈
- 哥哥有 20 元钱。在第一回合，他可以选择给弟弟 20 元，或给弟弟 10 元（自己留下 10 元）
- 在第二回合，兄弟俩就看哪部电影进行 BoS 博弈：
  - 右表中的回报是看电影带来的，在此基础上，兄弟俩可以用自己拥有的钱在电影院买零食，每 1 元钱相当于 1 单位的回报

哥哥 \ 弟弟	O	F
O	16, 12	0, 0
F	0, 0	12, 16

- 回答下面的问题：
  1. 画出整体博弈的博弈树
  2. 找到所有的纳什均衡（纯策略和混合策略）
  3. 找到所有的 SPE（纯策略和混合策略）