博弈论与信息经济学

6. 不完全信息静态博弈

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）

主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

贝叶斯博弈

不完全信息

Incomplete information

- 完全信息的假设往往过于理想：
  - 在古诺模型中，企业可能无法准确了解对手的成本函数
  - 多数情况下，人们可能在一定程度上了解对手的偏好，但无法完全确定

- 当我们讨论“不完全信息”时，我们在博弈的定义上做出下面的让步
  - 参与人了解自己和对手的行动集合
  - 参与人不确定对手的偏好（知道对手有几种可能的偏好，并知道各自的概率）

- 上面的博弈称为**不完全信息博弈（games of incomplete information）**
- 海撒尼（John C. Harsanyi）提出了不完全信息博弈的解法：
  - 将具有不同偏好的参与人称为参与人的**类型（type）**，并让“自然”在博弈开始前选择类型
  - 用此方法，我们可以将不完全信息博弈改写为（完全信息）非完美信息博弈，并用已知方法进行分析

不完全信息的例子

- 左图中为完全信息市场进入博弈
- 我们可以假设参与人 2 有两种类型：理智型（右图左侧）和疯狂型（右图右侧）参与人 1 知道参与人 2 的类型的概率分布为 $(p, 1-p)$

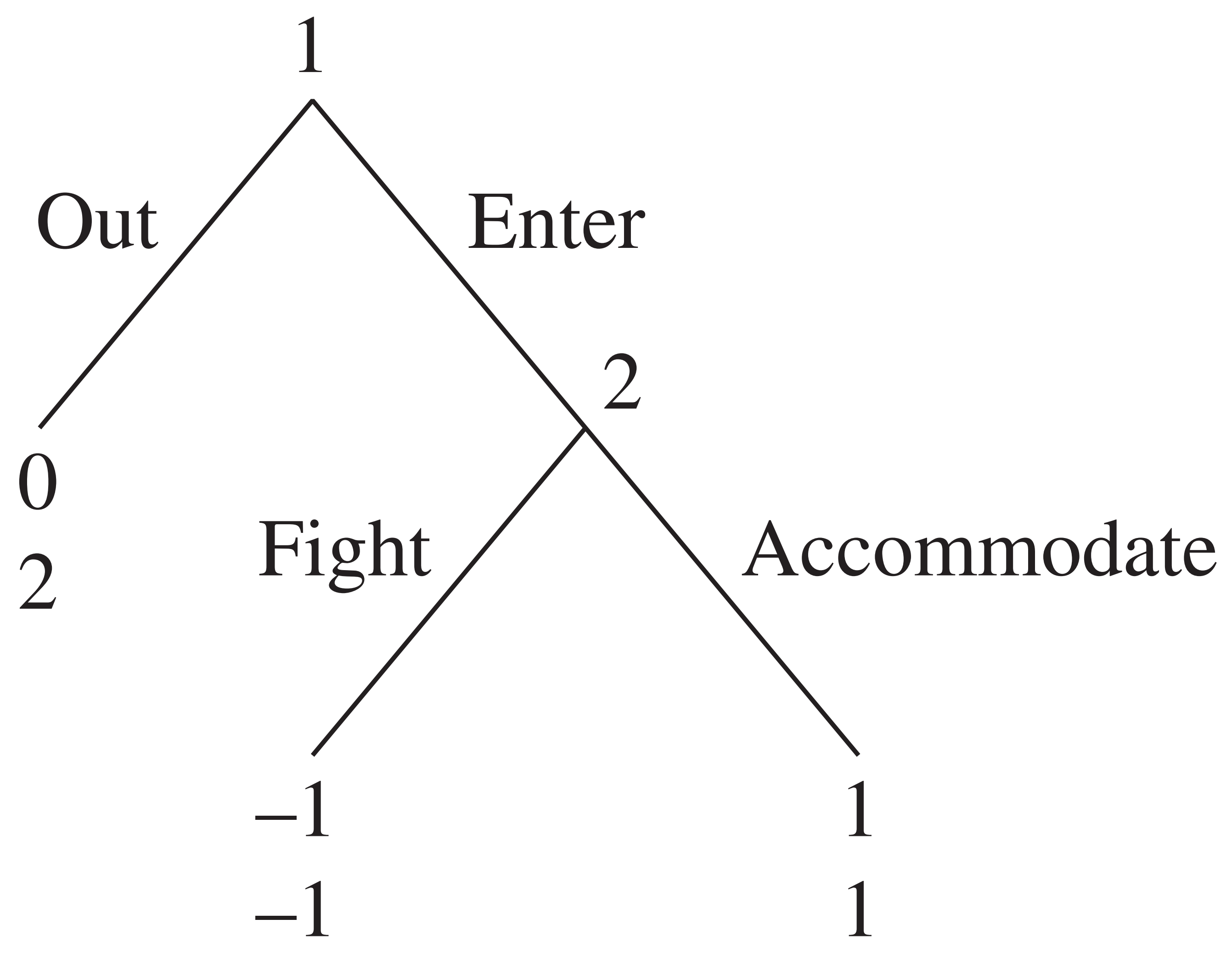


FIGURE 12.1 A simple entry game.

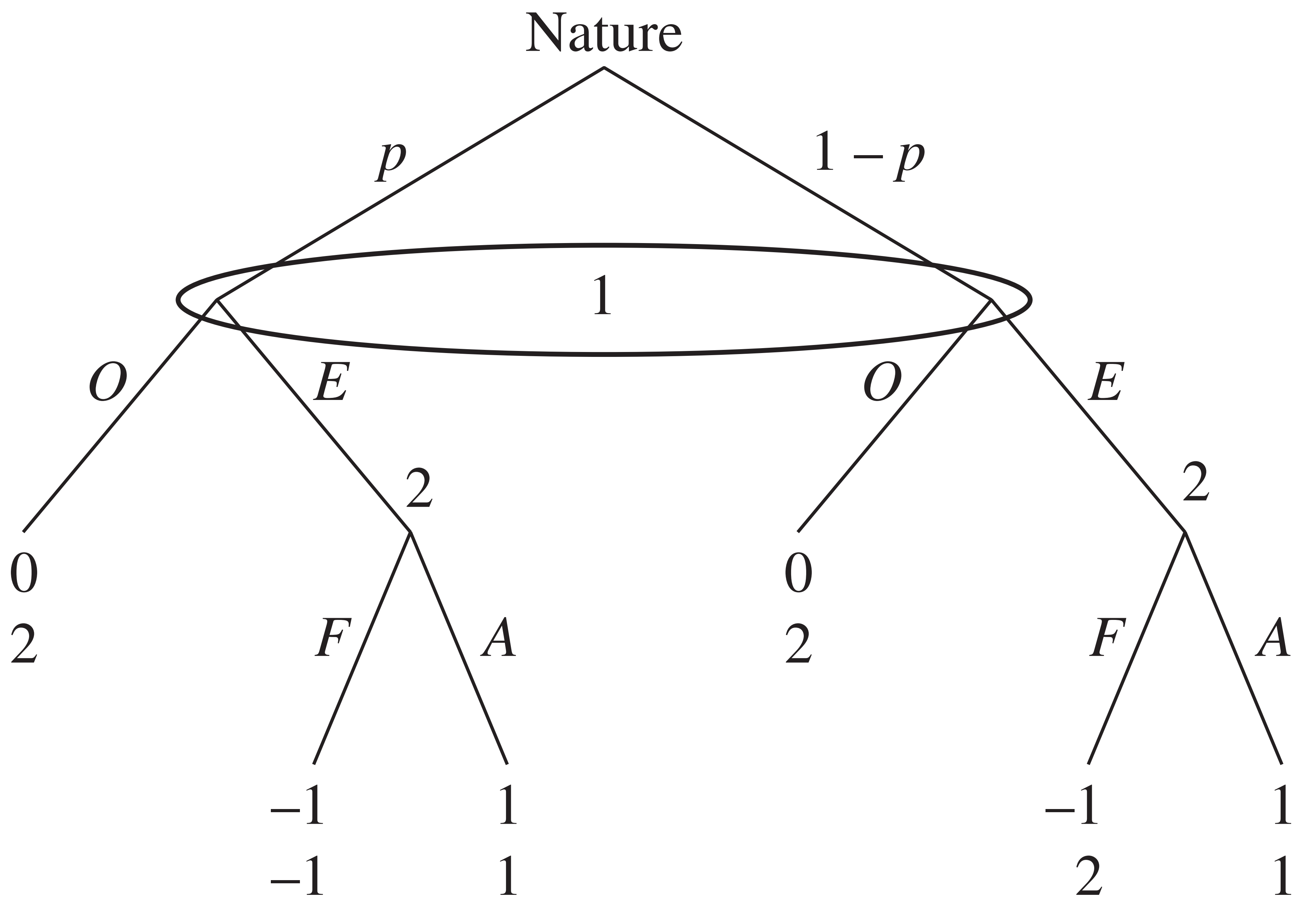


FIGURE 12.2 An incomplete-information entry game.

- “自然”首先按照概率分布 $(p, 1-p)$ 选择参与人 2 的类型
  - “自然”用来选择的概率分布称为**先验分布（prior distribution）**
  - 我们假设先验分布是共同知识（称为 common prior）
- 参与人了解自己的类型
  - 参与人 2 的信息集为单点
- 参与人 1 了解参与人 2 类型的分布 $(p, 1-p)$，我们称之为对参与人 2 类型的信念
  - 这本身也是一个很强的假设
  - 如果没有这个假设，我们无法分析不完全信息博弈

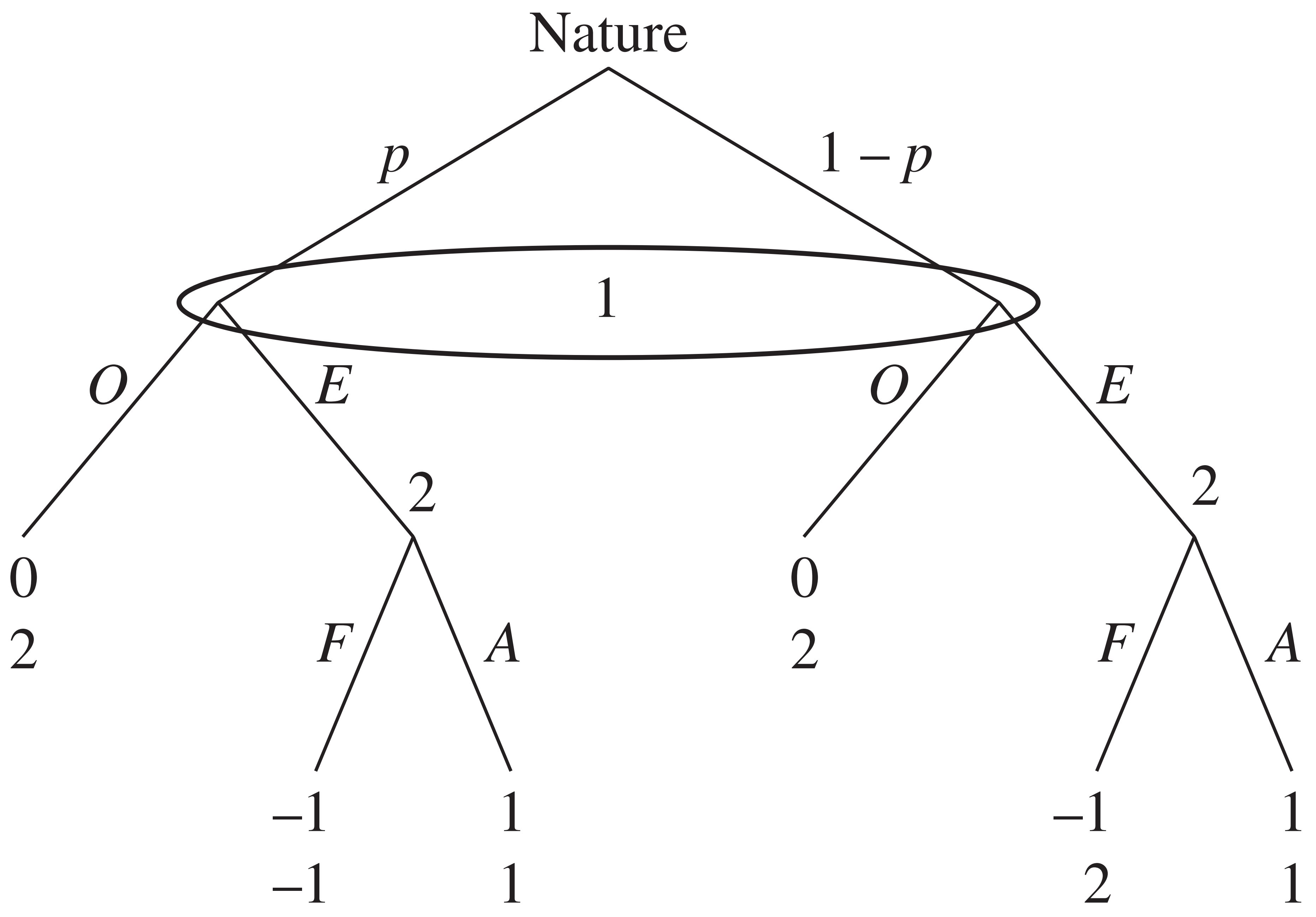


FIGURE 12.2 An incomplete-information entry game.

- 此博弈的标准式表达为

		Player 2			
		AA	AF	FA	FF
Player 1	O	0, 2	0, 2	0, 2	0, 2
	E	1, 1	$2p-1, 2-p$	$1-2p, 1-2p$	$-1, 2-3p$

- 当 $p = 2/3$ 时，博弈矩阵变成

		Player 2			
		AA	AF	FA	FF
Player 1	O	$\overline{0, 2}$	$\overline{0, 2}$	$\underline{\overline{0, 2}}$	$\underline{\overline{0, 2}}$
	E	$\underline{1, 1}$	$\underline{\overline{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}}}$	$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$	$-1, 0$

  - 纯策略纳什均衡为：(O, FA), (O, FF), (E, AF)
  - 纯策略 SPE 为 (E, AF)

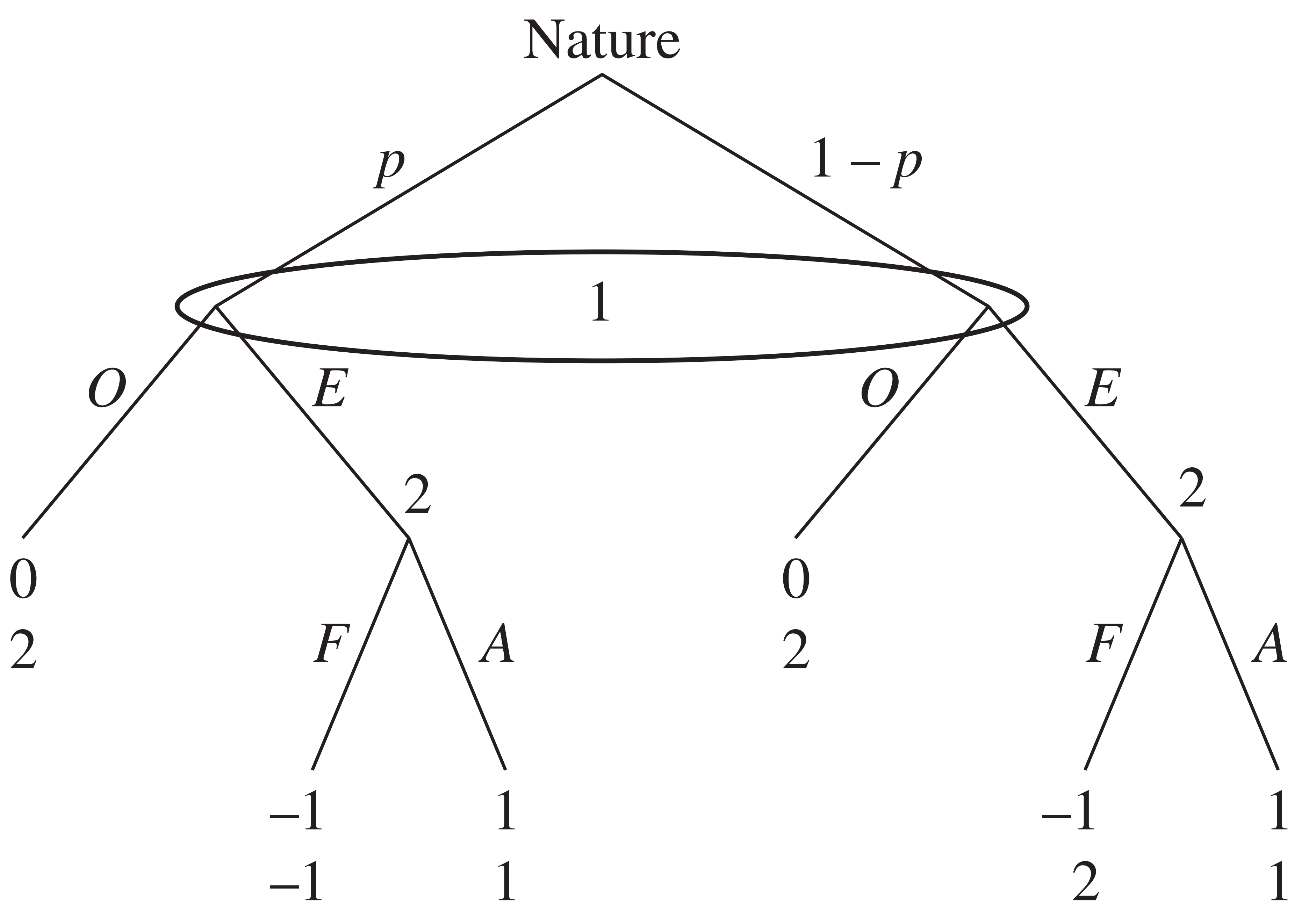


FIGURE 12.2 An incomplete-information entry game.

标准式贝叶斯博弈

Normal–form Bayesian game

- 不完全信息的定义包含以下三部分：
  - 参与人的每一种偏好对应一个类型
  - 对偏好的不确定型体现为“自然”选择参与人的类型
  - 先验分布是共同知识（common prior 假设）

n **人静态不完全信息贝叶斯博弈（static Bayesian game of incomplete information）**的标准式表达为

$$\left\langle N,\ \{A_i\}_{i\in N},\ \{\Theta_i\}_{i\in N},\ \{v_i(\,\cdot\,;\theta_i),\ \theta_i\in\Theta_i\}_{i\in N},\ \{\phi_i\}_{i\in N}\right\rangle$$

其中：

- $N=\{1,\ldots,n\}$ 为参与人集合，A_i 为参与人 i 的行动集合，$\Theta_i=\{\theta_{i1},\ldots,\theta_{ik_i}\}$ 是参与人 i 的**类型空间（type space）**
- $v_i : A\times\Theta_i\rightarrow\mathbb{R}$ 是参与人 i 在不同类型下的支付函数，其中 $A=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$
- ϕ_i 是参与人 i 对其他参与人类型的信念，完整写法为 $\phi_i(\theta_{-i}\mid\theta_i)$，代表在参与人 i 已知自己的类型为 θ_i 时，针对其他参与人类型 θ_{-i} 的条件分布（称为**后验分布 posterior distribution**）

贝叶斯博弈的扩展式表达

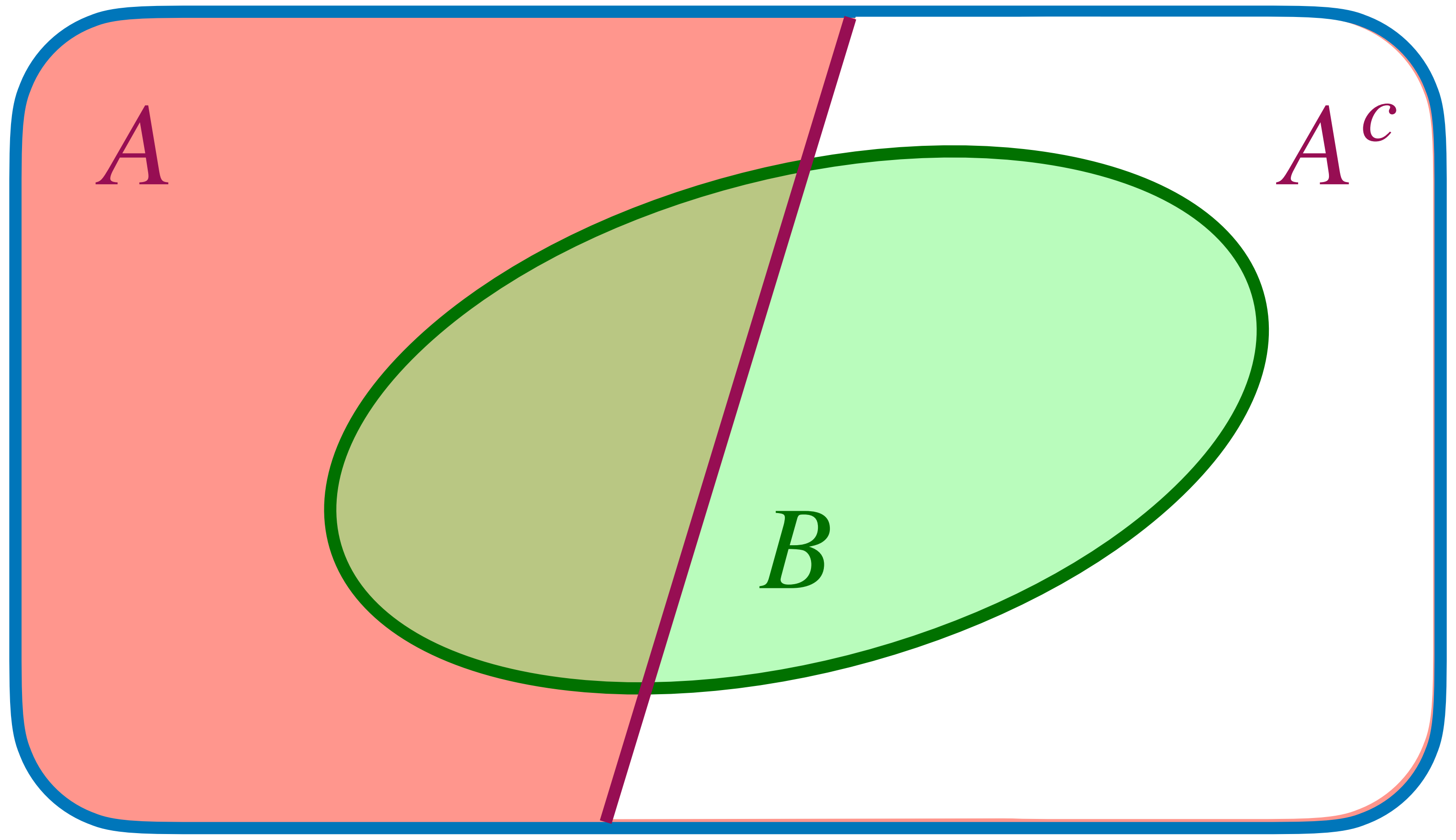
- 如果给定一个共同先验分布 $F : \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \to [0,1]$，就可以推导出一组对应的后验分布 $\{\theta_i\}_{i \in N}$，因此也可以将定义中的 $\{\theta_i\}_{i \in N}$ 替换为 F

注意：并不是所有的后验分布都可以由一个共同先验分布导出

- 静态贝叶斯博弈可以用下面的方式表达：
  1. “自然”选择参与人的类型组合 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$
  2. 每个参与人确认自己的类型 θ_i （注意这是私密信息 private information），并根据先验分布计算其他参与人类型的后验分布
  3. 所有参与人同时选择行动 $a_i \in A_i$
  4. 对每个行动组合 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$，参与人 $i \in N$ 的回报为 $v_i(a; \theta_i)$

此处我们假设回报只受自身类型 θ_i 的影响。
也可以假设回报受所有参与人类型的影响，即 $v_i(a; \theta)$

根据先验分布计算后验分布



- 联合概率和条件概率：

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B) \times \Pr(B) = \Pr(B \mid A) \times \Pr(A)$$

- 贝叶斯公式：

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B \cap A) + \Pr(B \cap A^c)}$$

- 我们可以将贝叶斯公式用在类型的后验分布计算上：

先验分布 F 确定了类型的联合分布和边际分布，则后验分布为 $\phi_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) = \dfrac{F(\theta_i, \theta_{-i})}{F(\theta_i)}$

计算后验分布的例子

- 两个参与人各有两个类型：$\Theta_1 = \{a, b\}$, $\Theta_2 = \{c, d\}$
- 先验分布 F 由右侧的联合分布矩阵给出：

		Player 2's type	
		c	d
Player 1's type	a	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

- 如果参与人 1 观察到自己的类型为 a，则他对参与人 2 类型的信念（后验分布）为：

$$\phi_1(\theta_2 = c \mid \theta_1 = a) = \frac{F(a \cap c)}{F(a)} = \frac{F(a \cap c)}{F(a \cap c) + F(a \cap d)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}$$

$$\phi_1(\theta_2 = d \mid \theta_1 = a) = \frac{F(a \cap d)}{F(a)} = \frac{F(a \cap d)}{F(a \cap d) + F(a \cap c)} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3} = \frac{2}{3}$$

不一致的信念

Inconsistent belief

- 考虑下面的情况
  - 参与人为 $N = \{1,2\}$
  - 参与人的类型为 $T_1 = \{I_1, I_2\}$, $T_2 = \{II_1, II_2\}$
  - 两人的信念（后验分布）由右图所示

- 没有任何先验分布可以推导出这两个后验分布
  - 假设先验分布中 $F(I_2, II_2) = x$
  - 从参与人 1 的信念可知 $F(I_2, II_1) = 2x$
  - 从参与人 2 的信念可知 $F(I_1, II_1) = 2x$, $F(I_1, II_2) = 4x$
  - 满足此条件的 F 和两人的信念矛盾
- 这一讲我们只关注可以由共同先验分布导出的信念

参与人 1 的信念

	II_1	II_2
I_1	3/7	4/7
I_2	2/3	1/3

类型为 I_1 的参与人 1
对参与人 2 类型的信念

参与人 2 的信念

	II_1	II_2
I_1	1/2	4/5
I_2	1/2	1/5

类型为 II_2 的参与人 2
对参与人 1 类型的信念

先验分布需要满足的条件

	II_1	II_2
I_1	$2x$	$4x$
I_2	$2x$	x

策略与回报

- 在完全信息静态博弈中，策略等同于选择一个行动。但在不完全信息博弈中，由于参与人有不同的类型，因此策略需要描述在每一个类型中参与人选择哪一个行动

在贝叶斯博弈 $\langle N, \{A_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{v_i(\cdot\,;\theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N}\rangle$ 中，参与人 i 的**纯策略**是从 i 的类型空间 Θ_i 映射到行动集 A_i 的函数 $s_i : \Theta_i \to A_i$，即 $s_i(\theta_i)$ 给出了类型为 θ_i 时参与人 i 选择的行动。参与人 i 的**混合策略**是他的纯策略上的概率分布

令 $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_n$，则参与人 i 关于纯策略组合 $s = (s_1(\cdot), s_2(\cdot), \cdots, s_n(\cdot))$ 的**事前**（ex ante，即博弈开始前）和**事中**（interim，即“自然”选择类型后，参与人选择行动前）期望回报分别为

$$V_i(s) = \mathrm{E}_F\left[v_i(s(\theta_i), s(\theta_{-i}); \theta_i)\right] = \sum_{(\theta_i,\theta_{-i})\in\Theta} F(\theta_i, \theta_{-i})\, v_i(s(\theta_i), s(\theta_{-i}); \theta_i)$$

这里假设了离散类型空间

$$V_i(s \mid \theta_i) = \mathrm{E}_{-\theta_i}\left[v_i(s(\theta_i), s(\theta_{-i}); \theta_i) \mid \theta_i\right] = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} \phi(\theta_{-i} \mid \theta_i)\, v_i(s(\theta_i), s(\theta_{-i}); \theta_i)$$

$$\Rightarrow\ V_i(s) = \sum_{\theta_i\in\Theta_i} F(\theta_i) V_i(s \mid \theta_i)$$

策略与回报

- 在不完全信息市场进入博弈中，参与人 2 有两个类型（r 理智型，c 疯狂型），其先验分布 F 为 $(p, 1-p)$
  - 考虑参与人 2 选择纯策略 AF，即 $s_2(\theta_2) = \begin{cases} A & \text{if } \theta_2 = r \\ F & \text{if } \theta_2 = c \end{cases}$
  - 参与人 1 只有一个类型，因此先验分布等于后验分布，其事前和事中期望回报一致。当他选择策略 E 时，

$$V_1(E, AF) = \mathrm{E}\left[v_1(E, s_2(\theta_2))\right] = pv_1(E, s_2(r)) + (1-p)v_1(E, s_2(c))$$
$$= p \times 1 + (1-p) \times (-1)$$

  - 参与人 2 的事前期望回报为

$$V_2(E, AF) = \mathrm{E}\left[v_2(E, s_2(\theta_2); \theta_2)\right] = pv_2(E, s_2(r); r) + (1-p)v_1(E, s_2(c); c)$$
$$= p \times 1 + (1-p) \times 2$$

事中期望回报为

$$V_2(E, AF \,|\, r) = \mathrm{E}\left[v_2(E, s_2(\theta_2); r) \mid r\right] = v_2(E, s_2(r); r) = 1 \qquad V_2(E, AF \,|\, c) = \mathrm{E}\left[v_2(E, s_2(\theta_2); c) \mid c\right] = v_2(E, s_2(c); c) = 2$$

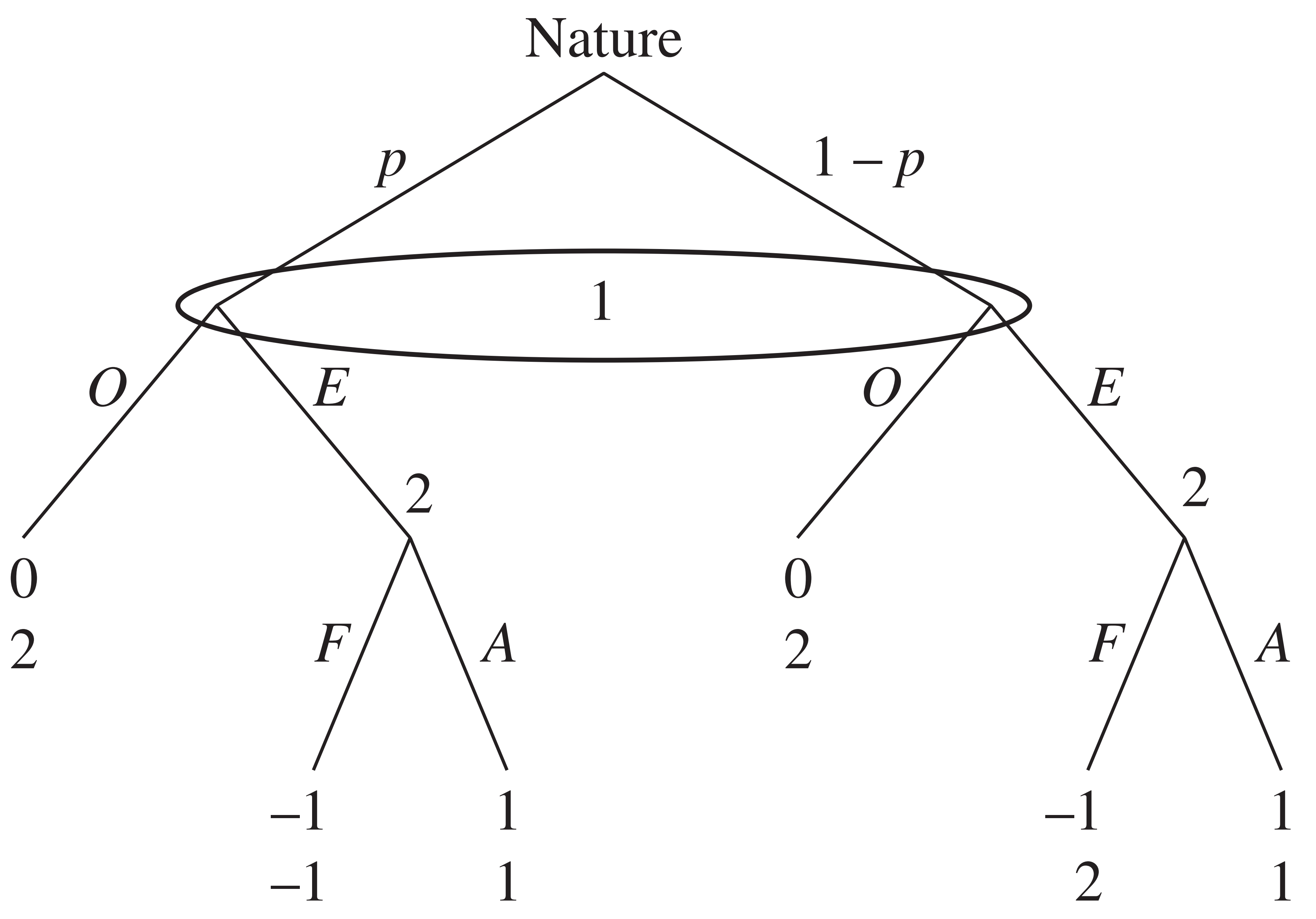


FIGURE 12.2 An incomplete-information entry game.

虽然市场进入博弈是序贯行动博弈，但我们也可以将其转换为同时行动博弈，并当作静态博弈分析

贝叶斯纳什均衡

Bayesian Nash equilibrium

在贝叶斯博弈 $\langle N, \{A_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{v_i(\cdot\,;\theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i\in N}, \{\phi_i\}_{i\in N} \rangle$ 中，如果纯策略组合 $s^* = \left(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot)\right)$ 对于任意参与人 i 的任意类型 $\theta_i \in \Theta_i$ 以及任意行动 $a_i \in A_i$ 都满足

$$V_i(s^*) \geq V_i(a_i, s_{-i}^*)$$ 事前期望回报

$$\Leftrightarrow \quad V_i(s^* \,|\, \theta_i) \geq V_i(a_i, s_{-i}^* \,|\, \theta_i)$$ 事中期望回报

则称 s^* 为**纯策略贝叶斯纳什均衡（pure-strategy Bayesian Nash equilibrium）**

注：基于事前期望回报的是**纳什均衡**，基于事中期望回报的定义称为**贝叶斯均衡（Bayesian equilibrium）**
海撒尼证明了在有限类型空间下两者等价

胆小鬼博弈

Game of chicken

- 两个青年比赛谁胆大：两人同时开着父母的车冲向对方，在相撞前的瞬间，两人需要（同时）选择避让或继续直行
- 如果选择避让，则得不到朋友的尊敬，但也不会损失什么，即回报为 0
- 如果一人选择直行，另一人选择避让，则选择直行者会得到尊敬，其回报为 $R > 0$
- 如果两人都选择直行，则两人平分朋友的尊敬（每人获得 $R/2$），但因为相撞带来的损失为 k（车损人伤），因此各自的回报为 $R/2 - k$

- 假设青年的父母各有两种类型：严厉的（$k = H$）或仁慈的（$k = L$），$H > L$
- 父母类型的先验分布为 $(1/2, 1/2)$
- 两人知道各自父母的类型，但不知道对方父母的类型

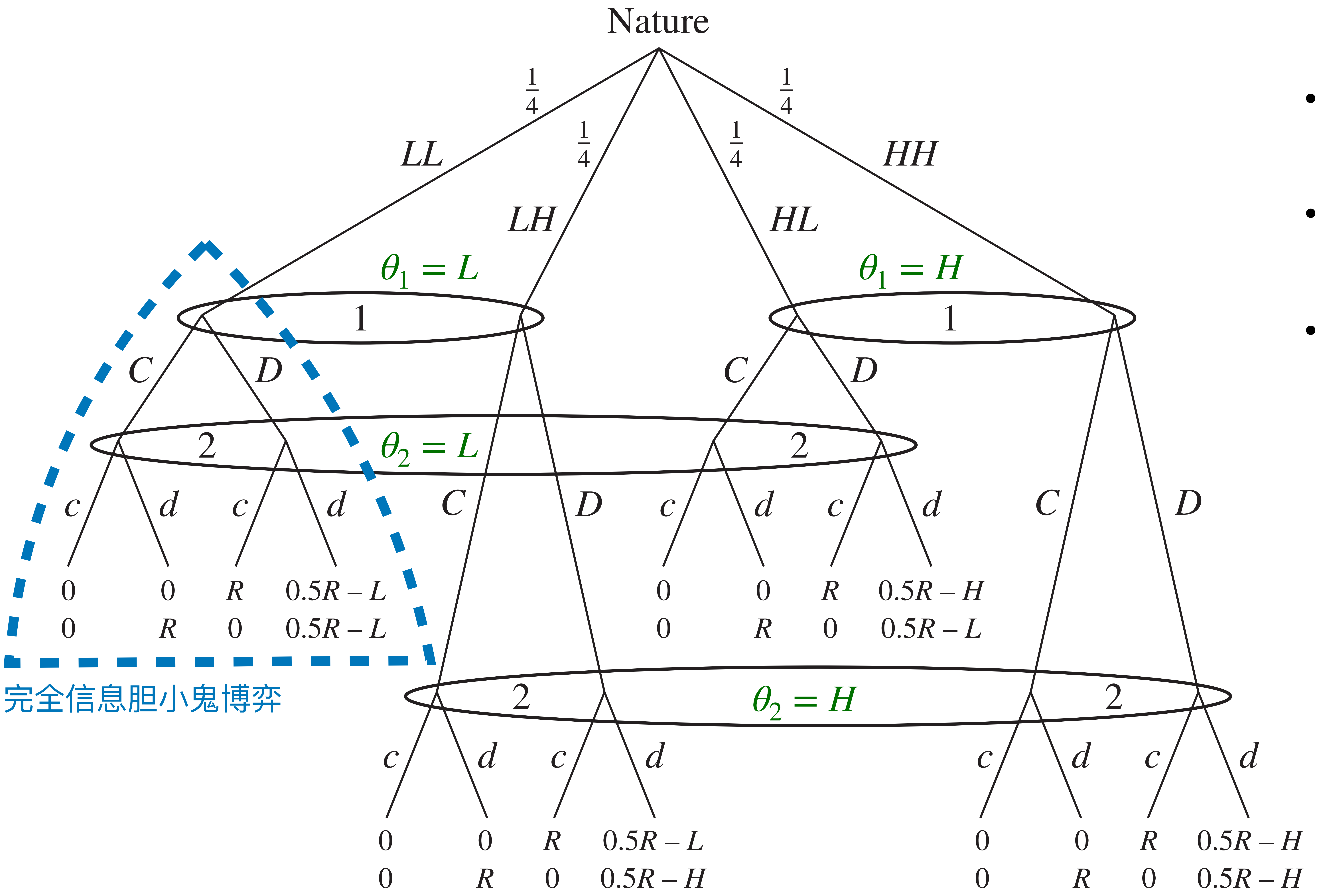


FIGURE 12.3 The game of chicken with incomplete information.

- 类型空间为
  $\Theta = \{LL, LH, HL, HH\}$
- 两人的行动集分别为
  $A_1 = \{C, D\}, A_2 = \{c, d\}$
- 两人的策略集分别为
  $S_1 = \{CC, CD, DC, DD\}$
  $S_2 = \{cc, cd, dc, dd\}$

- 我们可以通过事前期望回报计算贝叶斯纳什均衡
  - 例如：策略组合 (CD, dd) 对应的参与人 1 的事前期望回报为

$$V_1(CD, dd) = \mathrm{E}_F\big[v_1(CD, dd; \theta_1)\big] = \frac{1}{4}v_1(C, d; L) + \frac{1}{4}v_1(C, d; L) + \frac{1}{4}v_1(D, d; H) + \frac{1}{4}v_1(D, d; H)$$

$$= \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times 0 + \frac{1}{4}\times(\frac{R}{2} - H) + \frac{1}{4}\times(\frac{R}{2} - H) = \frac{R}{4} - \frac{H}{2}$$

同理可计算其他事前期望回报

  - 将回报写入博弈矩阵，可得

Player 2

		cc	cd	dc	dd
Player 1	CC	$0, 0$	$0, \frac{R}{2}$	$0, \frac{R}{2}$	$0, R$
	CD	$\frac{R}{2}, 0$	$\frac{3R}{8} - \frac{H}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{H}{4}$	$\frac{3R}{8} - \frac{H}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{L}{4}$	$\frac{R}{4} - \frac{H}{2}, \frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}$
	DC	$\frac{R}{2}, 0$	$\frac{3R}{8} - \frac{L}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{H}{4}$	$\frac{3R}{8} - \frac{L}{4}, \frac{3R}{8} - \frac{L}{4}$	$\frac{R}{4} - \frac{L}{2}, \frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}$
	DD	$R, 0$	$\frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}, \frac{R}{4} - \frac{H}{2}$	$\frac{3R}{4} - \frac{L}{4} - \frac{H}{4}, \frac{R}{4} - \frac{L}{2}$	$\frac{R}{2} - \frac{L}{2} - \frac{H}{2}, \frac{R}{2} - \frac{L}{2} - \frac{H}{2}$

当 $R = 8, H = 16, L = 0$ 时，此博弈的贝叶斯纳什均衡就是下面的矩阵博弈中的纳什均衡 (DC, dc)

Player 2

		cc	cd	dc	dd
Player 1	CC	$0, 0$	$0, 4$	$0, 4$	$\overline{0, 8}$
	CD	$4, 0$	$-1, -1$	$\overline{-1, 3}$	$-6, 2$
	DC	$4, 0$	$\underline{3, -1}$	$\overline{\underline{3, 3}}$	$\underline{2, 2}$
	DD	$\underline{8, 0}$	$2, -6$	$\overline{2, 2}$	$-4, -4$

练习：贝叶斯均衡

- 继续考虑胆小鬼博弈，并回答下列问题：
  1. 计算每个参与人的事中期望回报

     例如参与人 1 在 $\theta_1 = H$ 时，策略组合 (CD, dd) 的事中期望回报是

     $$V_1(CD, dd \mid H) = E_{\theta_2}\left[v_1(CD, s_2(\theta_2); H) \mid H\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2} - H\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2} - H\right) = \frac{R}{2} - H$$

  2. 找到 $R = 8$, $H = 16$, $L = 0$ 时的纯策略贝叶斯均衡

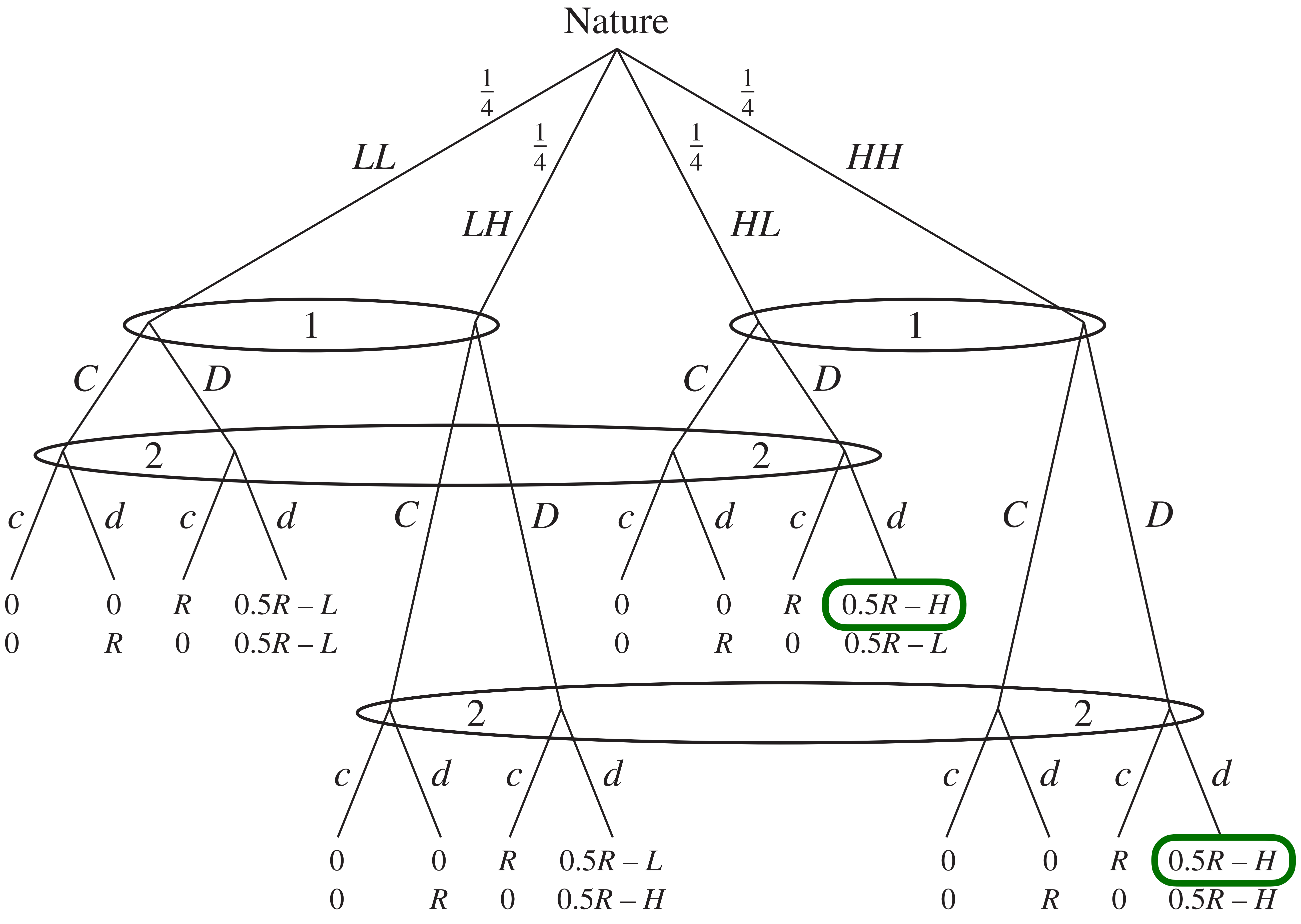


FIGURE 12.3 The game of chicken with incomplete information.

课后阅读

- 自主学习书中第 12 章第 12.2.2 小节