博弈论与信息经济学

8. 隐藏信息的博弈分析：逆向选择问题与信号传递

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

逆向选择问题

柠檬市场的博弈模型

- 参与人 1 拥有一片橙子树，并了解其土地的肥沃程度
- 从公开信息可以了解到，该片土地为 (贫瘠 = L、中等 = M、肥沃 = H) 的概率分布为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$。因此我们可以设参与人 1 的类型为他所了解的土地状态 $\Theta_1 = \{L, M, H\}$
- 参与人 1 从拥有该片土地获得的回报为

$$v_1(\theta_1) = \begin{cases} 10 & \text{if } \theta_1 = L \\ 20 & \text{if } \theta_1 = M \\ 30 & \text{if } \theta_1 = H \end{cases}$$

- 参与人 2 打算买下该片土地用来种大豆，他从拥有该片土地获得的回报为

$$v_2(\theta_1) = \begin{cases} 14 & \text{if } \theta_1 = L \\ 24 & \text{if } \theta_1 = M \\ 34 & \text{if } \theta_1 = H \end{cases}$$

柠檬市场的博弈模型

- 参与人 2 只能从公开信息了解该片土地的状态（信息不对称）
- 考虑下面的博弈
  - 参与人 2 提出以价格 $p \geq 0$ 购买该片土地，然后参与人 1 可以接受（A）或拒绝（R）
  - 参与人 1 的纯策略是 $s_2 : [0,\infty) \times \{L, M, H\} \to \{A, R\}$，即在每一个可能的价格和类型的组合中选择 A 或 R

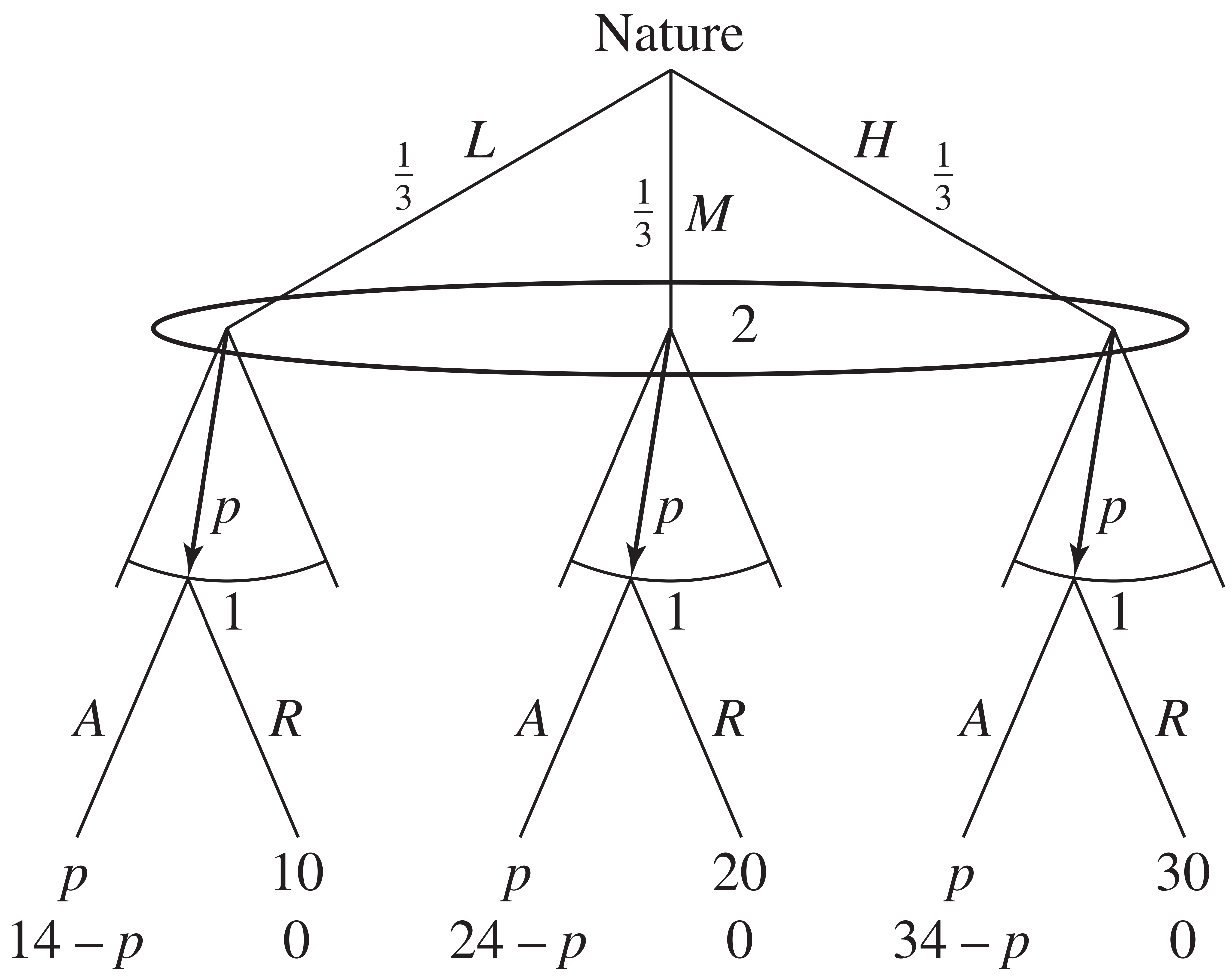


FIGURE 12.5 A trading game with incomplete information.

- 当参与人 1 知道自己的类型时（事中），其最优反应是

$$\mathrm{BR}_1(p \mid L) = \begin{cases} A & \text{if } p \geq 10 \\ R & \text{if } p \leq 10 \end{cases}, \quad \mathrm{BR}_1(p \mid M) = \begin{cases} A & \text{if } p \geq 20 \\ R & \text{if } p \leq 20 \end{cases}, \quad \mathrm{BR}_1(p \mid H) = \begin{cases} A & \text{if } p \geq 30 \\ R & \text{if } p \leq 30 \end{cases}$$

因此，在 BNE 策略中，参与人 1 只有可能选择 AAA $(p \geq 30)$, AAR $(20 \leq p \leq 30)$, ARR $(10 \leq p \leq 20)$, 或 RRR $(p \leq 10)$

柠檬市场的博弈模型

- 参与人 2 的期望回报是

$$V_2(AAA,p) = \tfrac{1}{3}(14-p)+\tfrac{1}{3}(24-p)+\tfrac{1}{3}(34-p) = 24-p$$

$$V_2(AAR,p) = \tfrac{1}{3}(14-p)+\tfrac{1}{3}(24-p) = \tfrac{2}{3}(19-p)$$

$$V_2(ARR,p) = \tfrac{1}{3}(14-p)$$

$$V_2(RRR,p) = 0$$

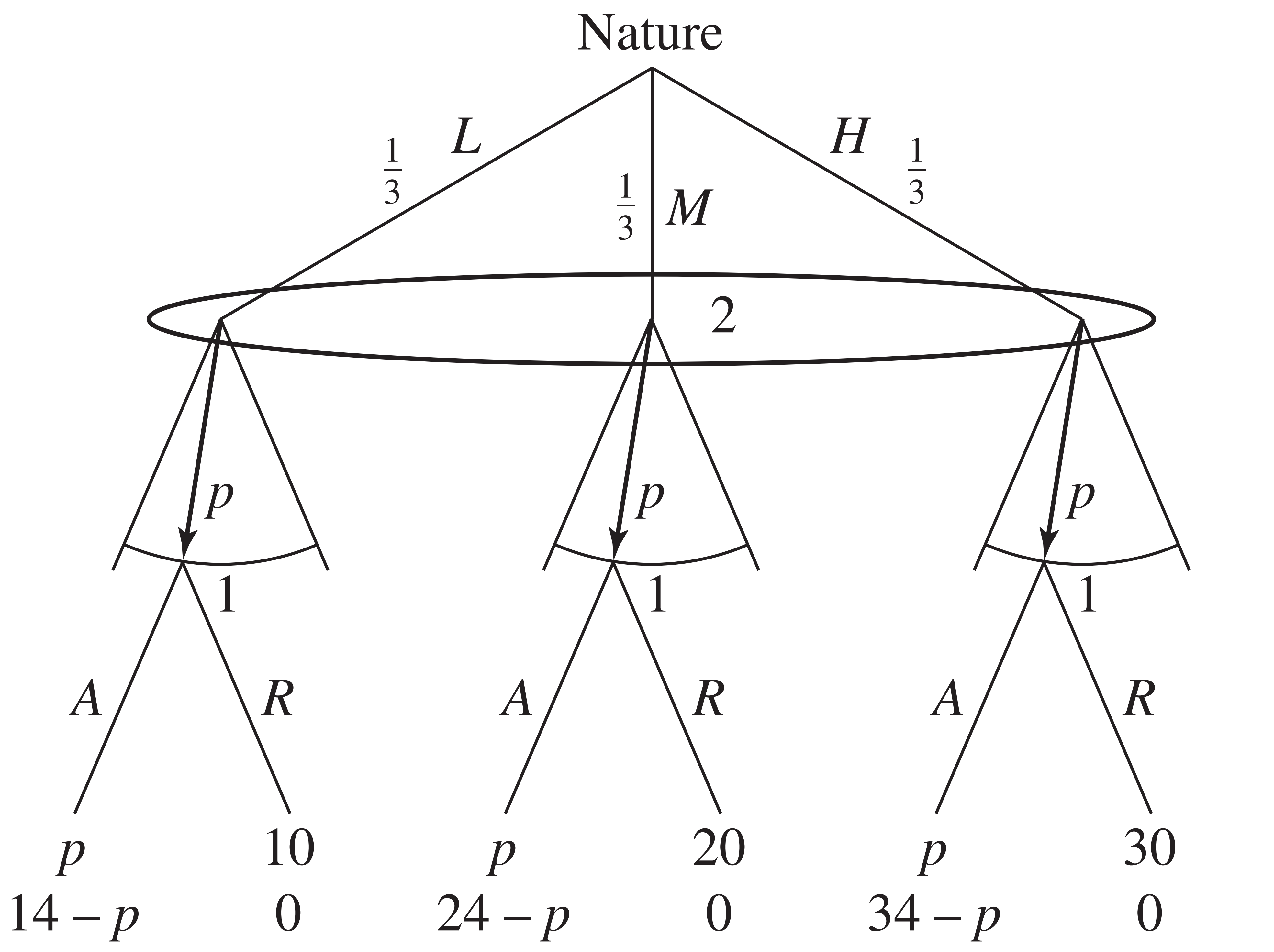


FIGURE 12.5 A trading game with incomplete information.

因此，当参与人 1 选择 AAA 时，只有 $p \le 24$ 会给参与人 2 带来正的期望回报，但此时参与人 1 不会选择 AAA。同理参与人 1 不会选择 AAR。参与人 1 选择 ARR 的条件是 $p \ge 10$，同时参与人 2 获得正期望回报的条件是 $p \le 14$，因此可得出下面的结论

对任意的 $p^* \in [10, 14]$，参与人 1 的策略“当自己的类型是 L 时，仅在 $p \ge p^*$ 时接受交易；类型为 M 时，仅在 $p \ge 20$ 时接受交易；类型为 H 时，仅在 $p \ge 30$ 时接受交易”和参与人 2 的策略“$p = p^*$”构成了一个 BNE

逆向选择：交易仅在土地贫瘠的情况下才能发生

解决逆向选择问题：信号传递

信号传递博弈

Signaling game

- 逆向选择问题的根源在于博弈中的一方不知道另一方的类型。如果另一方选择告知自己的类型，是否就可以避免逆向选择问题呢?
- 2001年的诺贝尔经济学奖授予了 George A. Akerlof, A. Michael Spence 和 Joseph E. Stiglitz，他们的获奖理由是“对非对称信息市场的分析”
- 其中 Michael Spence 的贡献是明确了在什么条件下，信号传递可以解决逆向选择问题。这是他在博士论文中的研究
  - 在信号传递博弈中，了解信息（自己的类型）的一方首先选择行动
  - 不了解信息的一方在观察到另一方的行动后，有可能推断出对方的类型

Photo from the Nobel Foundation archive.
George A. Akerlof
Prize share: 1/3

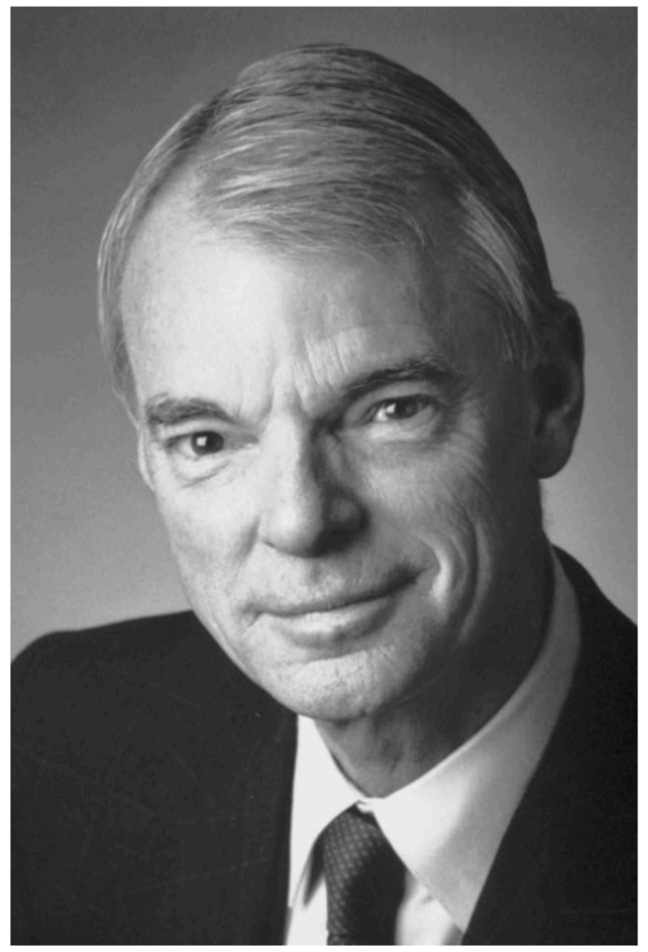


Photo from the Nobel Foundation archive.
A. Michael Spence
Prize share: 1/3

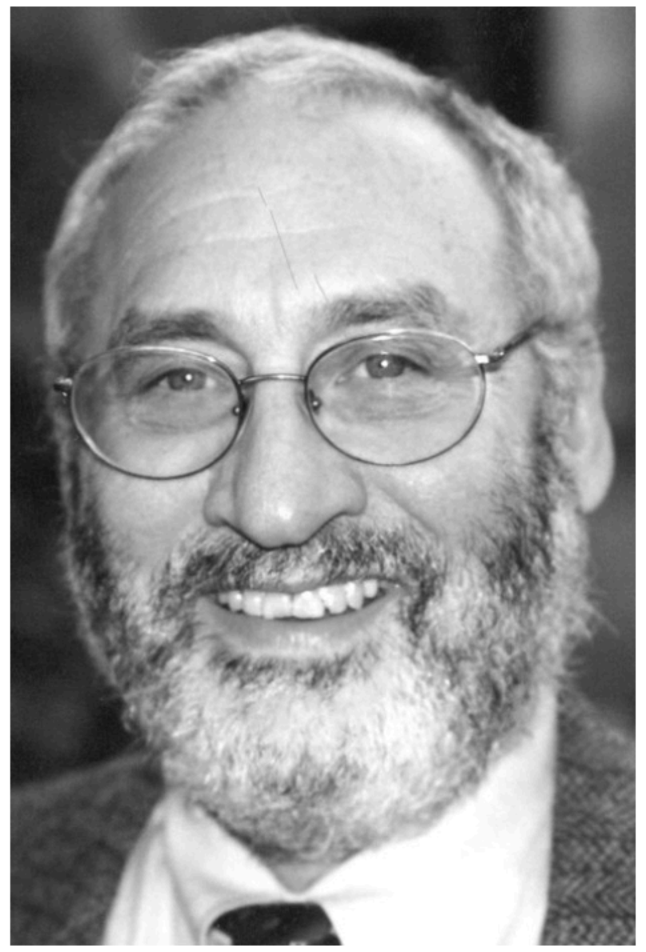


Photo from the Nobel Foundation archive.
Joseph E. Stiglitz
Prize share: 1/3

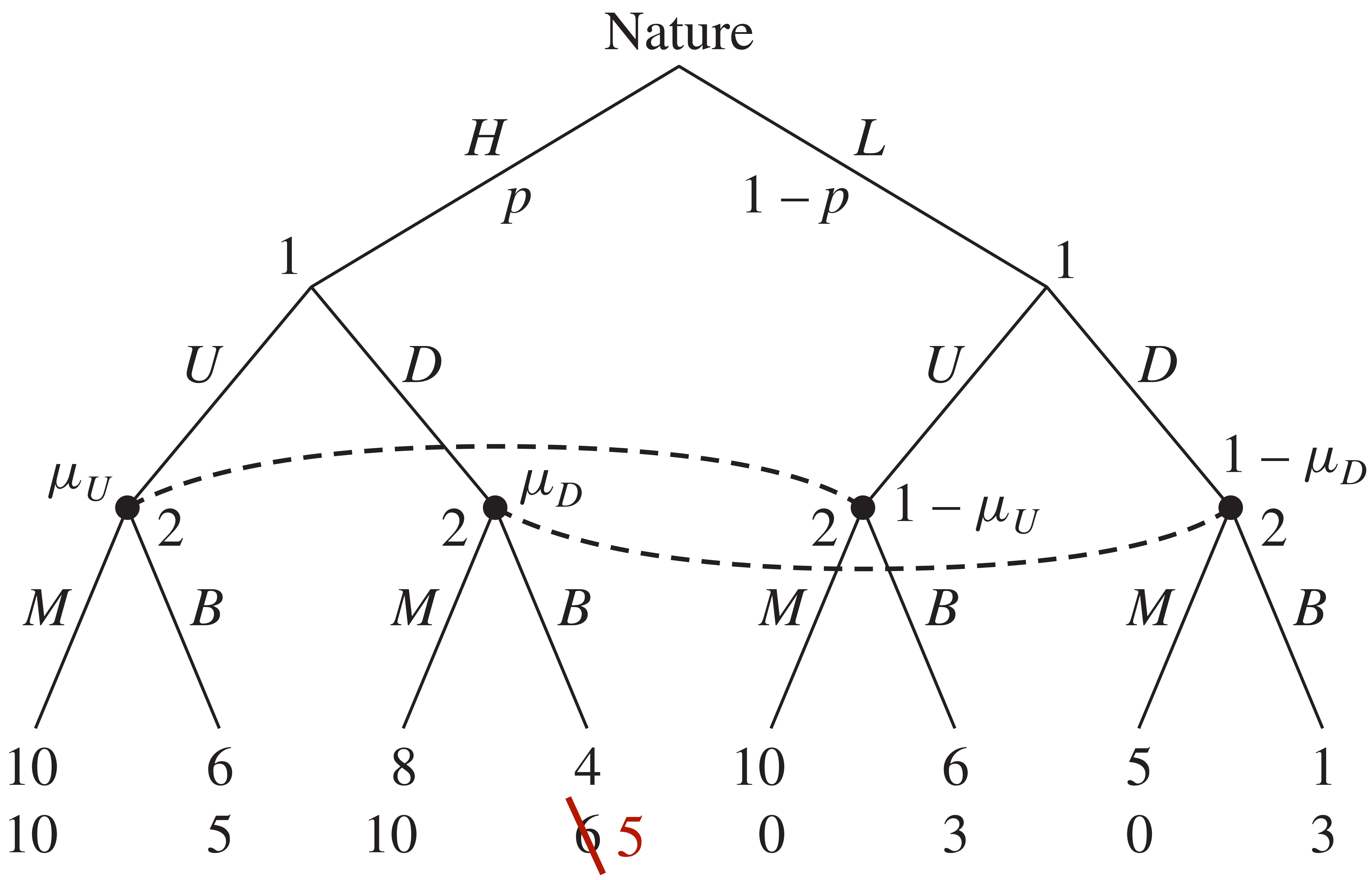
教育的信号传递

- 在就业市场中，雇主因为不了解应聘者的实际能力，往往会出现逆向选择问题（雇主只能给出平均工资，而平均工资只能吸引低能力的应聘者）。此时，应聘者可以通过自己的教育水平或毕业学校的层次向雇主暗示自己的能力（而非所掌握的知识）
- 下面考虑获取 MBA 学位的信号传递作用
  - 将参与人 1（应聘者）按照能力分为两个类型 $\Theta_1 = \{L, H\}$，参与人 2 无法观察参与人 1 的类型。假设共同先验分布为 $\Pr(\theta_1 = H) = p$
  - 参与人 1 在知道自己的类型后，可以选择攻读 MBA 学位（D）或者不攻读（U）。这里我们不考虑攻读 MBA 获得的知识，只考虑需要的成本。能力高的人通常学习起来比较轻松，因此可以假设 $c_H < c_L$。这里设 $c_H = 2, c_L = 5$
  - 参与人 2（雇主）可以给应聘者安排管理岗（M）或生产岗（B），两个岗位的工资满足 $w_M > w_B$。这里设 $w_M = 10, w_B = 6$
  - 不同类型的员工在不同岗位上创造的价值不同：高能力者更适合管理岗，低能力者更适合生产岗。员工能力和岗位的组合给雇主带来的纯利润为右图

	M	B
H	10	5
L	0	3

教育的信号传递

博弈树



- 参与人 2 仅能观察到参与人 1 的选择，因此他有两个信息集：I_U 和 I_D

  在 I_U 中的信念为 $(\mu_U, 1-\mu_U)$
  在 I_D 中的信念为 $(\mu_D, 1-\mu_D)$

$$\mu_a = \Pr(\theta_1 = H \mid a_1 = a)$$

- 当参与人 1 的行为策略为

$$\sigma^\theta = \Pr(a_1 = U \mid \theta_1 = \theta)$$

时，根据贝叶斯公式，

$$\mu_U = \frac{p\sigma^H}{p\sigma^H + (1-p)\sigma^L} \quad (\sigma^H, \sigma^L) \neq (0, 0)$$

$$\mu_D = \frac{p(1-\sigma^H)}{p(1-\sigma^H) + (1-p)(1-\sigma^L)}$$

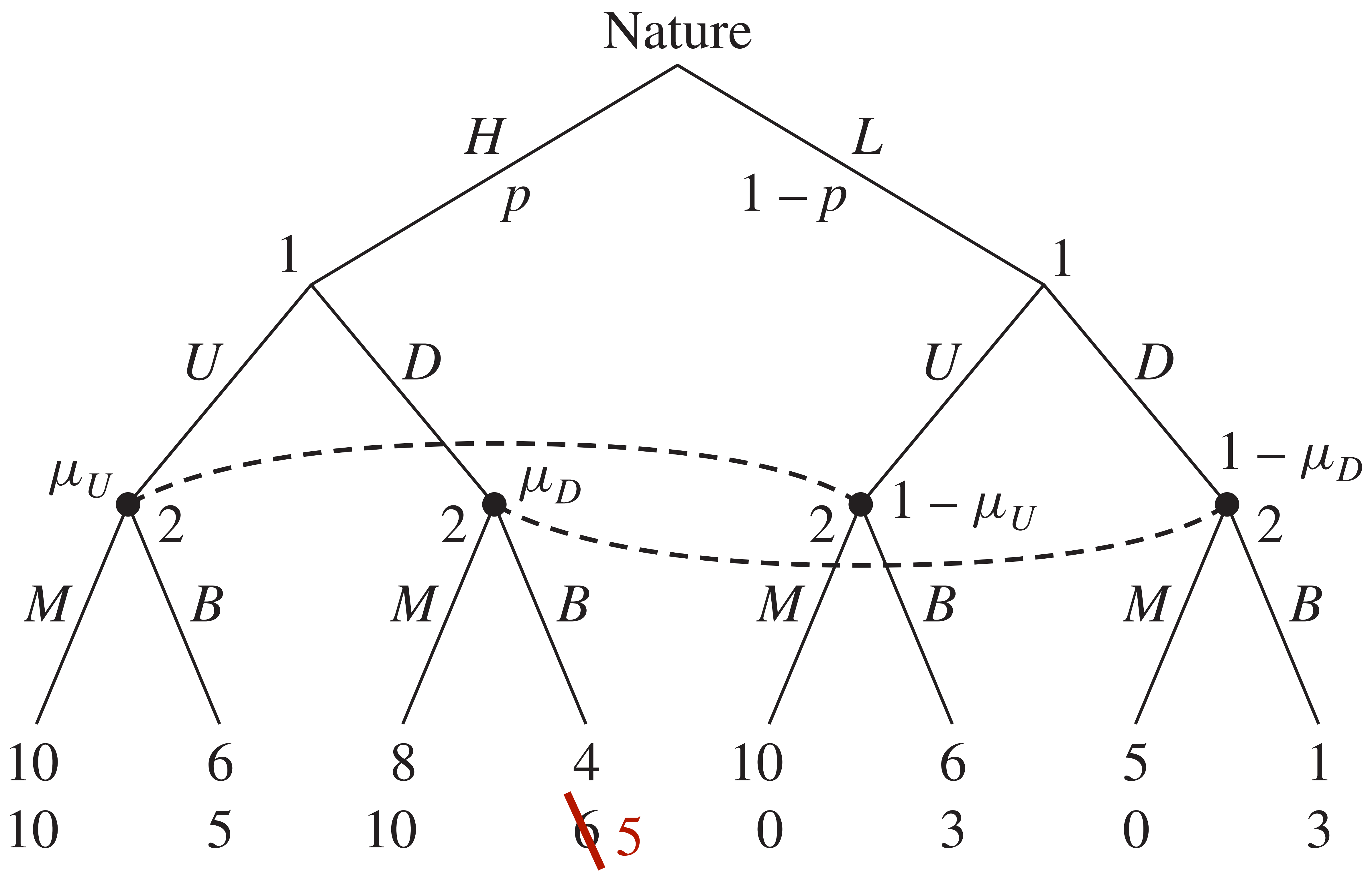
$(\sigma^H, \sigma^L) \neq (1, 1)$

教育的信号传递

$p = 1/4$ 时的 BNE 和 PBE

- 纯策略集合为 $A_1 = \{UU, UD, DU, DD\}$
  $A_2 = \{MM, MB, BM, MM\}$
- 事前期望回报:

例如 $v_1(UD, MB) = \frac{1}{4} \times 10 + \frac{3}{4} \times 1 = 3.25$



	MM	MB	BM	BB
UU	$\underline{10}$, 2.5	$\underline{10}$, 2.5	6, $\overline{3.5}$	6, $\overline{3.5}$
UD	6.25, 2.5	3.25, $\overline{4.75}$	5.25, 1.25	2.25, 3.5
DU	9.5, 2.5	8.5, 1.25	$\underline{6.5}$, $\overline{4.75}$	4.5, 3.5
DD	5.75, 2.5	1.75, $\overline{3.5}$	5.75, 2.5	1.75, $\overline{3.5}$

$\Rightarrow$ 纯策略 BNE 为 (UU, BB), (DU, BM)

教育的信号传递

$p = 1/4$ 时的 BNE 和 PBE

- 双方选择 (DU, BM) 时，到达 I_U 和 I_D 的概率都为正，因此通过贝叶斯公式可以找到支持此均衡的信念：

  DU 对应 $\sigma^H = 0, \sigma^L = 1$，此时

$$\mu_U = \frac{1/4 \cdot 0}{1/4 \cdot 0 + 3/4 \cdot 1} = 0, \quad \mu_D = \frac{1/4 \cdot 1}{1/4 \cdot 1 + 3/4 \cdot 0} = 1$$

  因此，(DU, BM) 和信念 $(\mu_U = 0, \mu_D = 1)$ 构成了一个 PBE

  ⇒ 参与人 2 可以从参与人 1 的选择中知道其类型（这种均衡称为**分离均衡 separating equilibrium**）

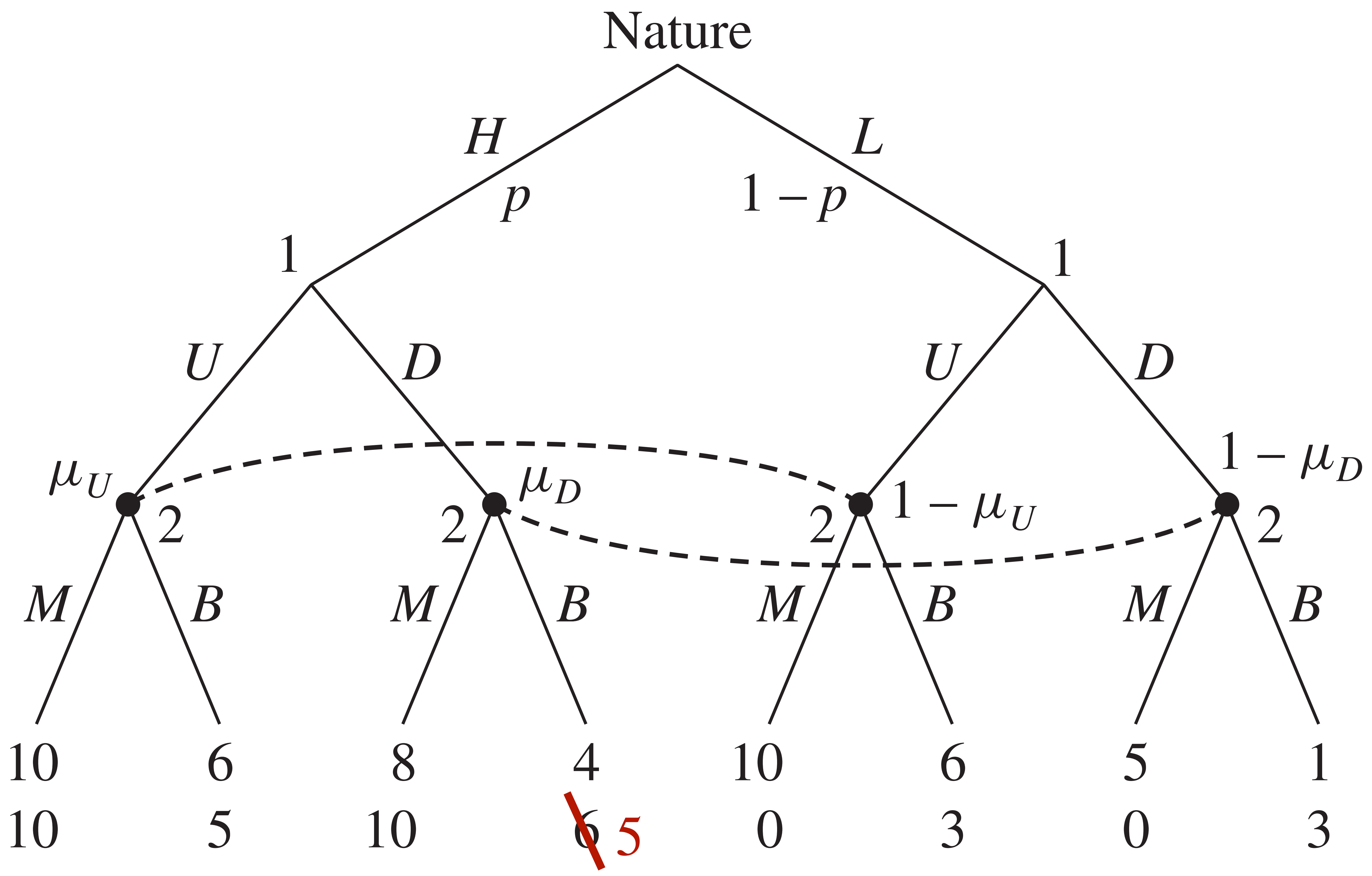
- 双方选择 (UU, BB) 时，到达 I_U 的概率为 1，对应的信念为 $\mu_U = \frac{1}{4}$

  参与人 2 在 I_D 时的条件期望为

$$v_2(UU, B \mid I_D, \mu_D) = 5\mu_D + 3(1-\mu_D) = 2\mu_D + 3, \qquad v_2(UU, M \mid I_D, \mu_D) = 10\mu_D + 0(1-\mu_D) = 10\mu_D$$

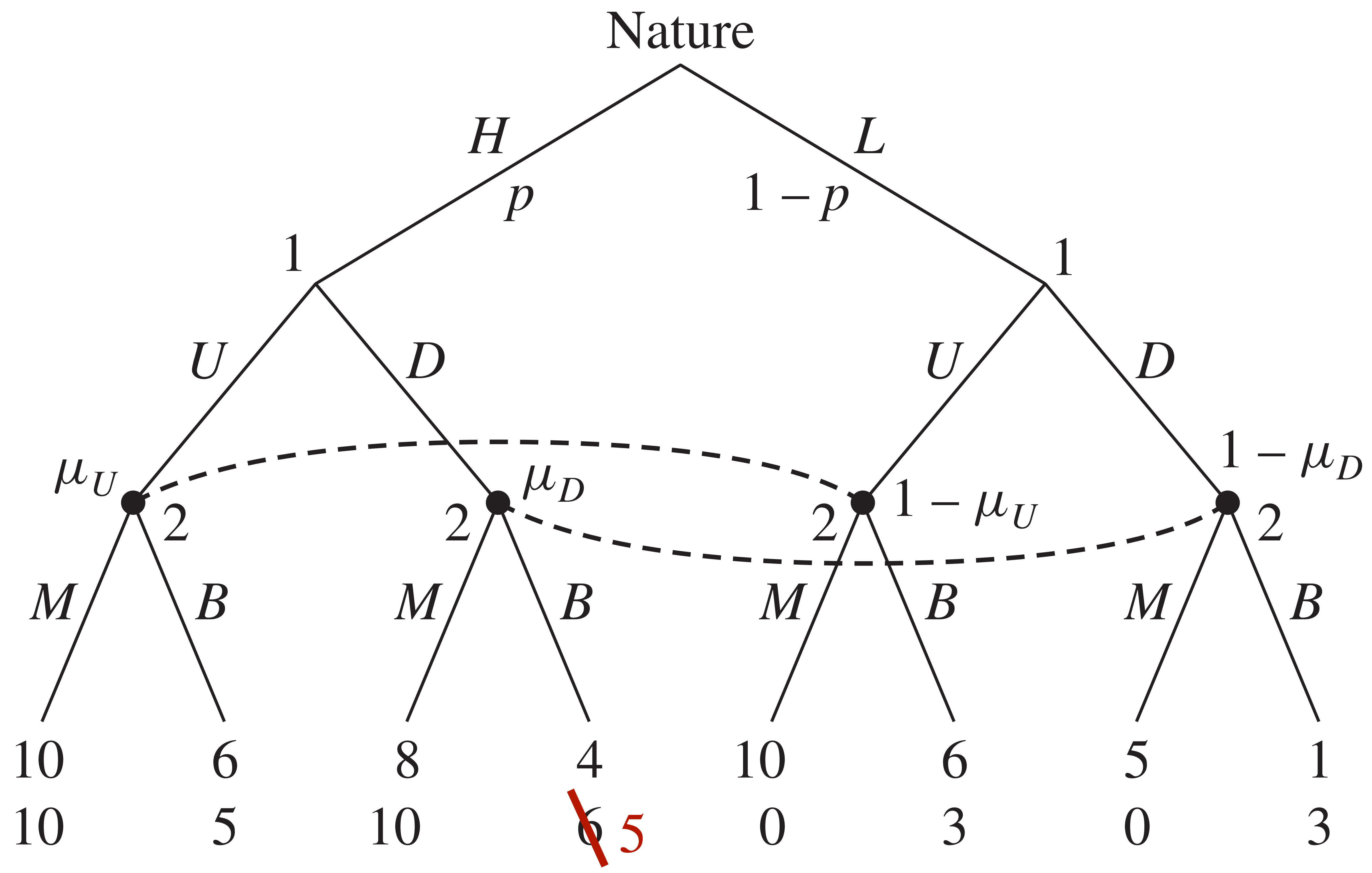
  因此，B 成为最优反应的条件是 $\mu_D \leq \frac{3}{8}$。(UU, BB) 和信念 $(\mu_U = \frac{1}{4}, \mu_D \in [0, \frac{3}{8}])$ 都可以构成 PBE

  ⇒ 参与人 2 无法从参与人 1 的选择中知道其类型（这种均衡称为**混同均衡 pooling equilibrium**）



PBE 的精炼

Refinement of PBE



- 在前面的博弈中，PBE 无法帮助我们排除混同均衡
- 在 (UU, BB) 中，我们可以考虑不同类型的参与人 1 有无改变策略的可能
  - 类型 H：如果选择 D 且参与人 2 选择 M 则参与人 1 的回报将从 6 上升为 8
  - 类型 L：如果选择 D 且参与人 2 选择 M 则参与人 1 的回报将从 6 下降为 5

  因此，只有类型 H 的参与人 1 才会试图通过选择 D 说服参与人 2 相信自己的类型为 H

这种推理方式称为**直觉标准**（**intuitive criterion**, Cho & Kreps, 1987），即针对 PBE σ^*，如果存在一个非均衡策略的行动 $a_1 \in A_1$，一个类型 $\theta_1 \in \Theta_1$，以及一个类型的子集 $\hat{\Theta} \subset \Theta_1$，能同时满足下面两个条件时，称 σ^* <u>不符合</u>直觉标准：

1. 对于 $\hat{\Theta}$ 中任意类型的参与人 1，无论参与人 2 的信念是什么，选择 a_1 都会带来比均衡策略更低的回报
2. 类型 θ_1 的参与人 1 如果能令参与人 2 相信自己的类型不在 $\hat{\Theta}$ 中，则选择 a_1 会带来比均衡策略更高的回报

- 在 (UU, BB) 中，$a_1 = D, \hat{\Theta} = \{L\}, \theta_1 = H$ 不符合直觉标准；而 (DU, BM) 符合。因此我们可以排除混同均衡 (UU, BB)

非升即走制度下的信号传递

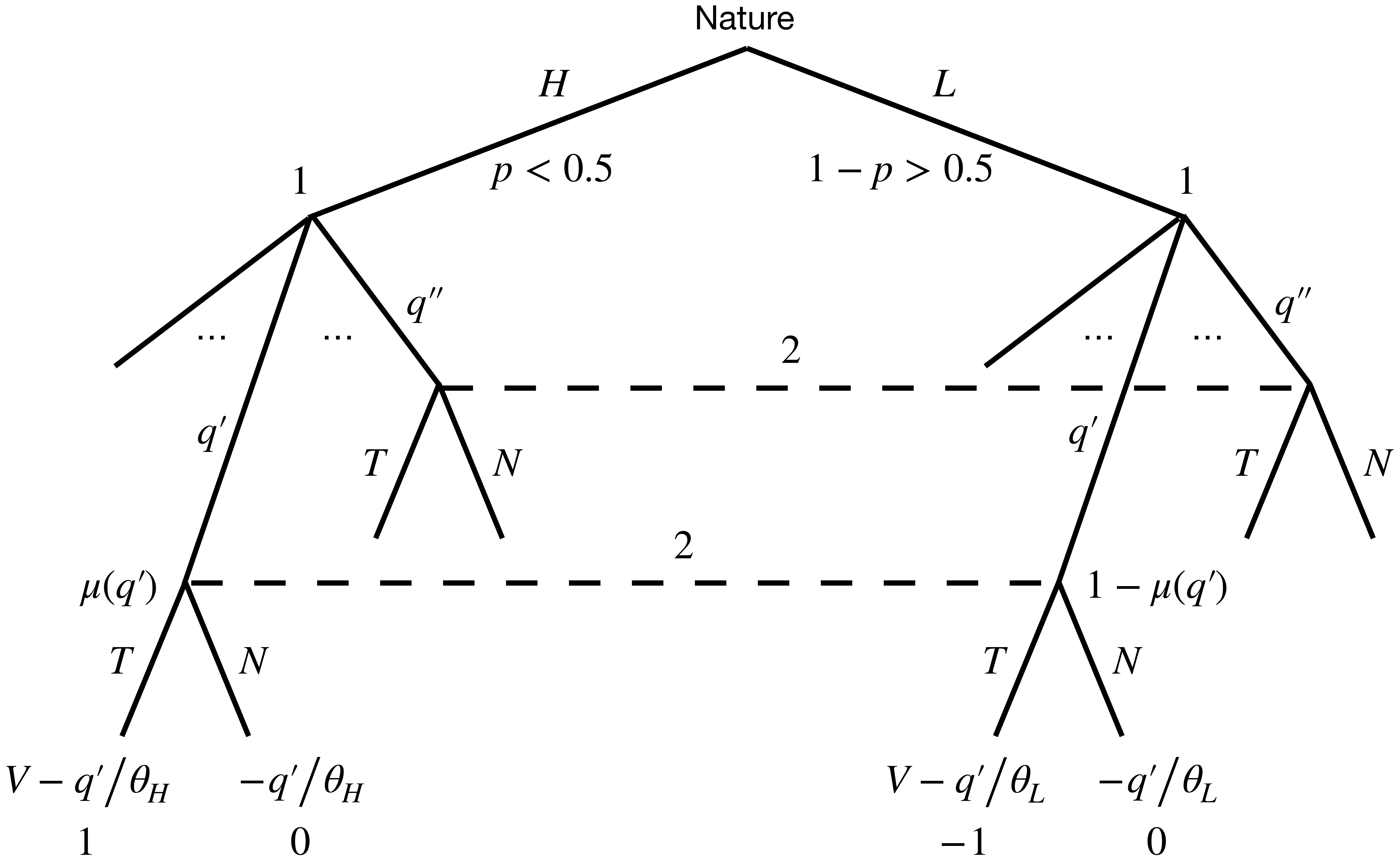
Publish or perish game

- “非升即走”是大学教师预聘–长聘制的另一种称谓，即教师在的预聘期结束前如果能成功晋升为副教授或教授，就可以获得长聘合同，否则就不继续聘用。因为能否晋升通常和发表文章的多少成正相关，因此英文中称非升即走为 publish–or–perish
- 假设教师按其能力分为 H 和 L 两类，各自的能力为 θ_H 和 θ_L，且 $\theta_H > \theta_L > 0$。任意教师为 H 类型的概率为 $p < 0.5$
- 大学在招聘阶段无法准确判断应聘者的类型，但是希望长期聘用 H 类型的教师，同时希望在预聘期后不再继续聘用 L 类型的教师
- 受聘教师将发表论文数看作信号。假设发表论文本身没有回报，发表 q 篇论文的劳动成本为 q/θ。长聘给教师带来的回报为 V，无法获得长聘则回报为 0
- 学校长聘 H 类型的教师获得的回报为 1，长聘 L 类型的教师获得的回报为 -1，不继续聘用获得的回报为 0

非升即走制度下的信号传递

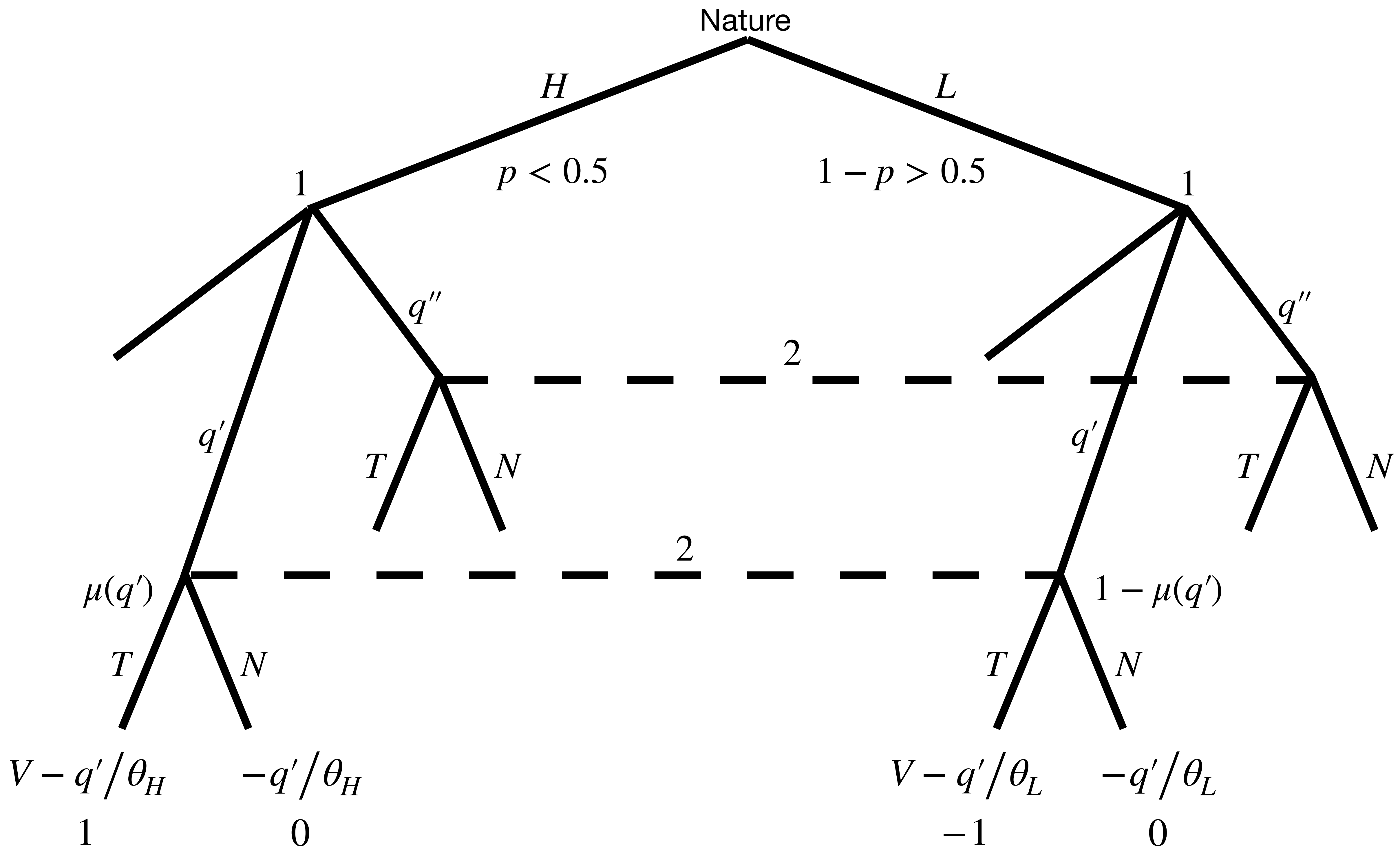
博弈树

- 参与人 1 为教师
  教师选择 $q \geq 0$
- 参与人 2 为大学
  大学选择 T 或 N,
  T 为长聘（tenure）
  N 为不续聘
- 大学的信念：
  在观察到教师的行动 q 时，认为其类型为 H 的概率是 $\mu(q)$



非升即走制度下的信号传递

混同完美贝叶斯均衡（pooling PBE）



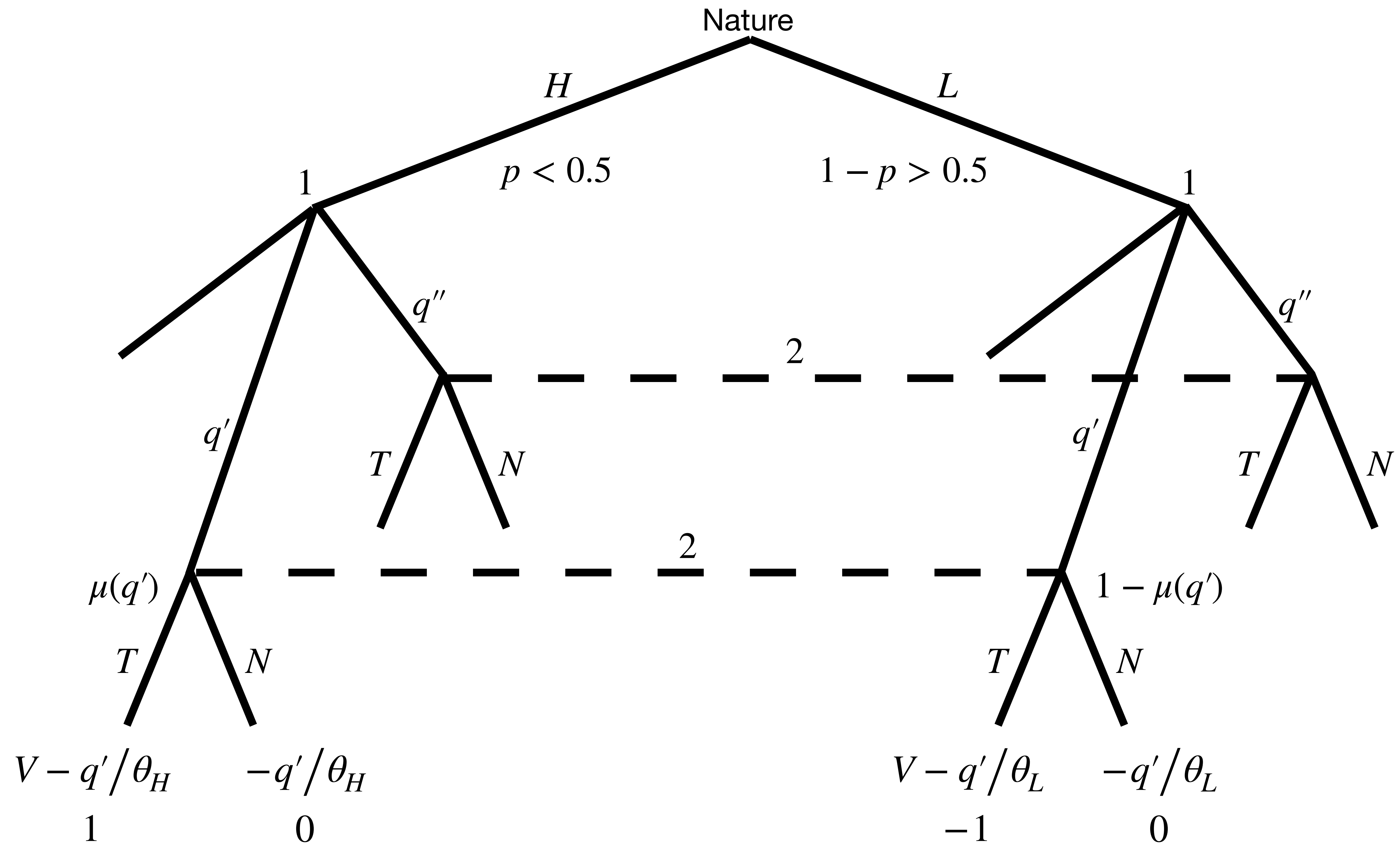
- 参与人 1 有无限多个行动可以选择，因此我们无法通过博弈矩阵求 BNE，只能通过 PBE 的满足的性质推导均衡策略
- 在混同均衡中，参与人 1 的策略为 $(q_H, q_L) = (q^*, q^*)$，参与人 2 的策略为 $s(q) : \{0,1,2,\ldots\} \to \{T, N\}$
- PBE 满足序贯理性，因此我们可以用类似逆向归纳的方式分析
  - 参与人 2 在观察到 q^* 时（在均衡路径上），根据贝叶斯公式，其信念为 $\mu(q^*) = p$，此时

$$\begin{aligned} E[v_2((q^*, q^*), s(q^*) = T) \mid q^*] &= p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1 < 0 \\ E[v_2((q^*, q^*), s(q^*) = N) \mid q^*] &= p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad s(p^*) = N$$

  - 参与人 2 观察到其他 $q \neq q^*$ 时（偏离均衡路径），我们可以考虑任意信念 μ，但是为了使参与人 1 选择均衡策略，我们选择令参与人 1 的回报最低的信念，即 $\mu(q) = 0$，此时 $s(q) = N$

非升即走制度下的信号传递

混同完美贝叶斯均衡（pooling PBE）



- 参与人 1 已知参与人 2 的最优策略和信念为

$$s(q) = N, \;\; \mu(q) = \begin{cases} p & \text{if } q = q^* \\ 0 & \text{if } q \neq q^* \end{cases}$$

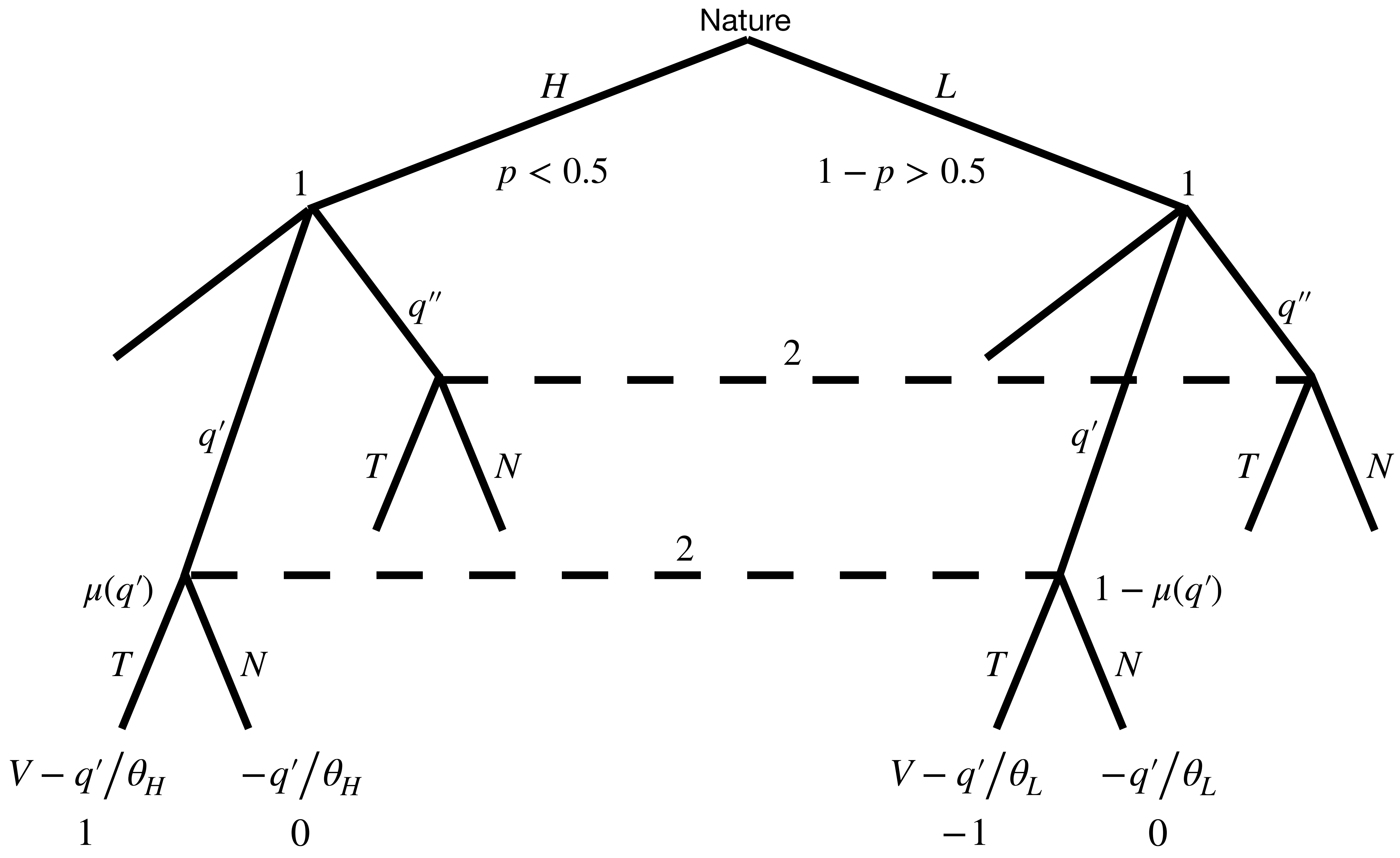
则

$$\begin{aligned} v_1((q^*, q^*), s(q); H) &= -q^*/\theta_H \\ v_1((q^*, q^*), s(q); L) &= -q^*/\theta_L \end{aligned}, \quad \begin{aligned} v_1((q', q'), s(q); H) &= -q'/\theta_H \\ v_1((q', q'), s(q); L) &= -q'/\theta_L \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad q^* = 0$$

- 因此，混同 PBE 是 $\big((q_H, q_L) = (0,0), s(q) = N\big)$, $\mu(q) = \begin{cases} p & \text{if } q = 0 \\ 0 & \text{if } q \neq 0 \end{cases}$
- 在均衡路径上，因为大学无法辨别教师的类型，任何类型的教师都会选择不发表论文

非升即走制度下的信号传递

分离完美贝叶斯均衡（separating PBE）



- 分离均衡中参与人 1 的策略是 $(q_H, q_L) = (q', q'')$, $q' \neq q''$
- 在均衡路径上，参与人 2 可以通过参与人 1 的行动判断其类型，因此

$$\mu(q') = 1,\ \mu(q'') = 0$$

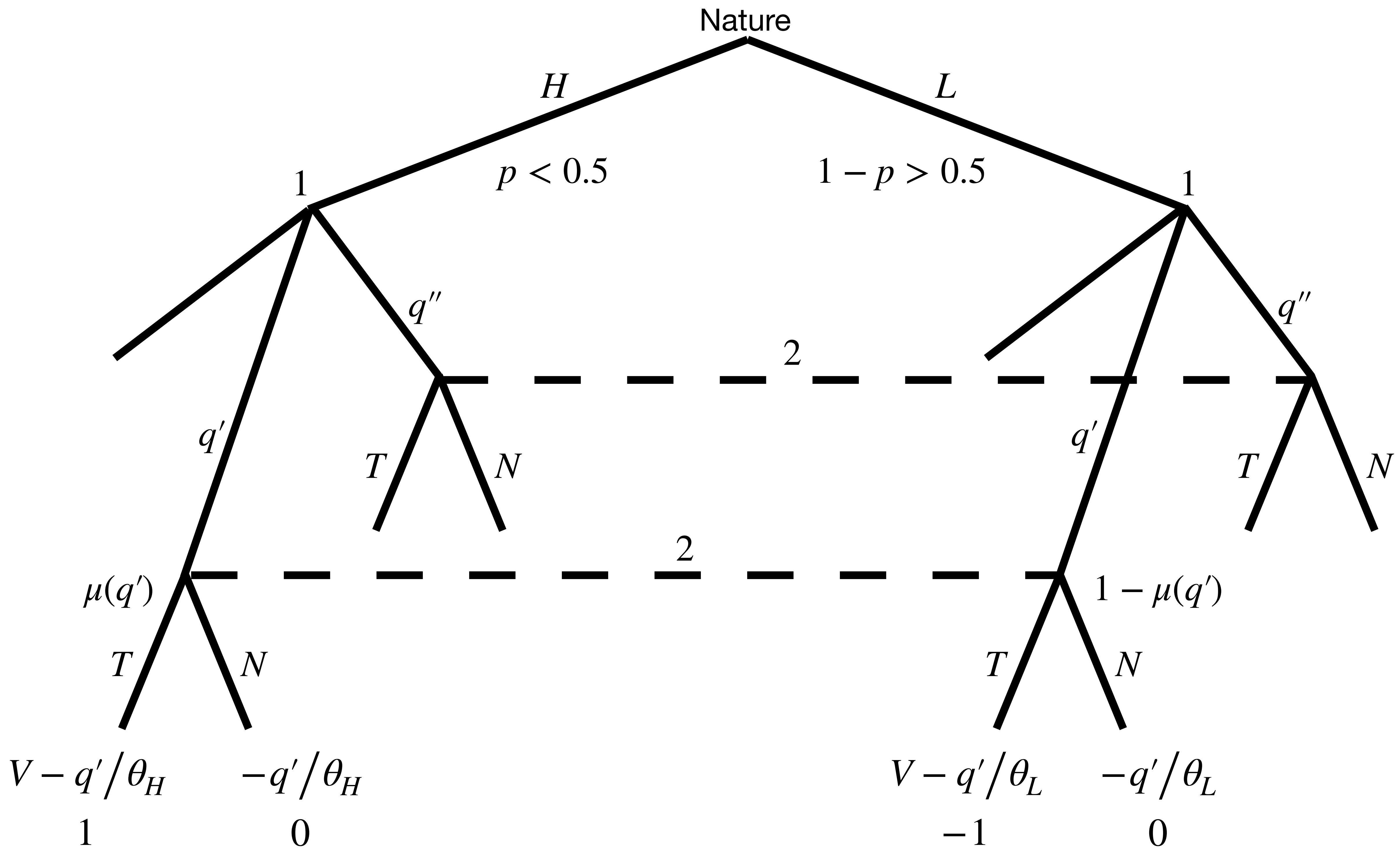
$$s(q') = T,\ s(q'') = N$$

- 偏离均衡路径时，参与人 2 选择对最不利于参与人 1 的信念，因此 $\mu(q) = 0$，$s(q) = N$
- 综上，参与人 2 的最优策略和信念是

$$s(q) = \begin{cases} T & \text{if } q = q' \\ N & \text{if } q \neq q' \end{cases}, \quad \mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = q' \\ 0 & \text{if } q \neq q' \end{cases}$$

非升即走制度下的信号传递

分离完美贝叶斯均衡（separating PBE）



- 参与人 1 的回报

$$v_1(q_H = q', s(q); H) = V - q'/\theta_H$$
$$v_1(q_H = q \neq q', s(q); H) = q/\theta_H$$

⇒ 当 $V - q'/\theta_H \geq -q/\theta_H \;\Leftrightarrow\; q' \leq V\theta_H + q$ 时，参与人 1 应当选择 q'

⇒ 不等式条件针对任意 $q \neq q'$ 成立，因此 $q' \leq V\theta_H$

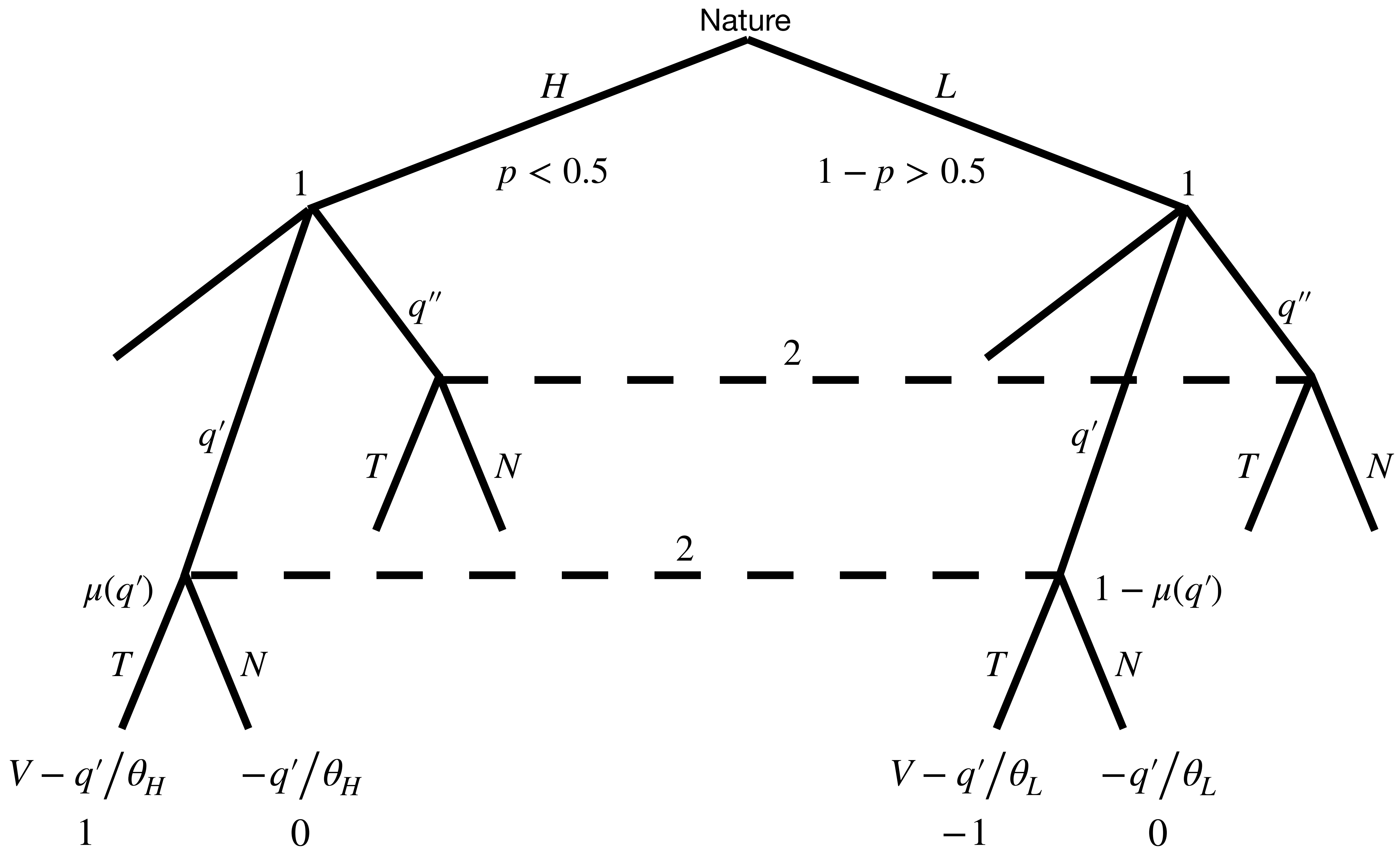
$$v_1(q_L = q'', s(q); L) = -q''/\theta_L$$
$$v_1(q_L = q', s(q); L) = V - q'/\theta_L$$
$$v_1(q_L = q\ (q \neq q', q \neq q''), s(q); L) = -q/\theta_L$$

⇒ 当 $-q''/\theta_L \geq V - q'/\theta_L \;\Leftrightarrow\; q' \geq V\theta_L + q''$ 且 $-q''/\theta_L \geq -q/\theta_L \;\Leftrightarrow\; q'' \leq q\ (q \neq q', q \neq q'')$ 时，参与人 1 应当选择 q''

因此，$q'' = 0$, $V\theta_L \leq q' \leq V\theta_H$

非升即走制度下的信号传递

分离完美贝叶斯均衡（separating PBE）



- 综上，分离 PBE 满足

$$(q_H, q_L) \in \left\{(q,\, 0) : q \in [V\theta_L, V\theta_H],\ q \text{ 为整数}\right\}$$

$$s(q) = \begin{cases} T & \text{if } q = q' \\ N & \text{if } q \neq q' \end{cases}$$

$$\mu(q) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = q' \\ 0 & \text{if } q \neq q' \end{cases}$$

- 其中，H 类型参与人 1 的回报为 $V - q/\theta_H \geq 0$, L 类型参与人 1 的回报为 0
- 参与人 1 获得最大回报的策略为 $q_H = \lceil V\theta_L \rceil$，且**仅有**此策略符合直觉标准
  因为当 $q_H \in (V\theta_L, V\theta_H]$ 时不符合直觉标准：
  - L 类型的参与人 1 如果选择 $q_L = \lceil V\theta_L \rceil$，则回报为负（比 $q_L = 0$ 时下降）
  - H 类型的参与人 1 如果选择 $q_H = \lceil V\theta_L \rceil$，则回报为最大（比 $q_H \in (V\theta_L, V\theta_H]$ 时上升）