

# 高级计量经济学

## Lecture 5: Statistical Properties of OLS

**黄嘉平**

工学博士 经济学博士  
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

**办公室** 粤海校区汇文楼1510  
**E-mail** [huangjp@szu.edu.cn](mailto:huangjp@szu.edu.cn)  
**Website** <https://huangjp.com>

# 多变量分布

## Multivariate Distribution

$\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$  为随机向量, 其联合密度函数为  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- 期望值

$$E[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \\ \vdots \\ \mu_{X_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu}$$

- 方差-协方差矩阵

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \cdots & \sigma_{X_1 X_n} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2 X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n X_1} & \sigma_{X_n X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^\top] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top$$

# 迭代期望定律

## Law of Iterated Expectation (LIE)

$$E[Y] = E_X[E[Y | X]]$$

证明:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(y | x) f_X(x) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y f(y | x) dy \right) f_X(x) dx \\ &= E_X[E[Y | X]] \end{aligned}$$

# OLS 假设

# 线性模型与 OLS 假设

independently and identically distributed  
在给出  $X$  的条件下,  $u_t$  服从独立同分布,  
其均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ , 任意  $u_s$  与  $u_t$  的协方差为 0。

完整的线性回归模型可以写成

$$y = X\beta + u, \quad u | X \sim \text{IID}(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

这个简洁的表述中包含以下假设:

1. 线性 linearity:  $y$  是  $\beta$  的线性函数
2. 解释变量  $X$  可以是随机的, 此时  $(y_t, x_{t1}, \dots, x_{tk})$  为同一个联合分布的独立样本
3. 外生性 exogeneity:  $E[u_t | X] = 0 \Rightarrow E[y | X] = X\beta$
4. 同方差性 homoskedasticity:  $\text{Var}[u_t | X] = \sigma^2$   
无自相关 non-autocorrelation:  $\text{Cov}[u_s, u_t | X] = 0$

$\Rightarrow$  在外生性成立时,  
 $\text{Var}[u_t | X] = \sigma^2 \Leftrightarrow E[u_t^2 | X] = \sigma^2$   
 $\text{Cov}[u_s, u_t | X] = 0 \Leftrightarrow E[u_s u_t | X] = 0$

为了保证 OLS 估计量  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$  存在, 我们还需要假设:

右侧两个条件可以简洁地  
写成  $E[uu^T | X] = \sigma^2 I$

5.  $X$  列满秩:  $\text{rank}(X) = k$

# 外生性条件

## The Exogeneity Condition

$E[u_t | X] = 0$  被称为严格外生性 (strict exogeneity)，在横截面数据中容易被满足，但在时间序列数据中往往过强。一个较弱的条件是前定性 (predeterminedness)  $E[u_t | X_t] = 0$ 。

由严格外生性可以导出：

$$1. E[u_t] = E_X[E[u_t | X]] = 0$$

$$2. E[uu^\top] = E_X[E[uu^\top | X]] = E[\sigma^2 I] = \sigma^2 I$$

此处假设同方差性和无自相关

因此， $X$  为随机变量时的结论也适用于  $X$  为固定变量时。

# (条件) 均值独立

## (Conditional) Mean Independence

均值独立性

当  $E[Y | X] = E[Y]$  时，称  $Y$  均值独立于  $X$ 。

由定义可知，均值独立性不是对称的概念， $Y$  均值独立于  $X$  不等于  $X$  均值独立于  $Y$ 。

定理：

$$\begin{array}{ccc} X \text{ 与 } Y \text{ 独立} & \Rightarrow & X \text{ 与 } Y \text{ 均值独立} & \Rightarrow & X \text{ 与 } Y \text{ 线性不相关} \\ X \perp\!\!\!\perp Y & \Leftrightarrow & E[X | Y] = E[X], & \Leftrightarrow & \text{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow E[XY] = E[X]E[Y] \\ & & E[Y | X] = E[Y] & & \end{array}$$

详细信息可参考 <https://www.econometrics.blog/post/why-econometrics-is-confusing-part-ii-the-independence-zoo/>

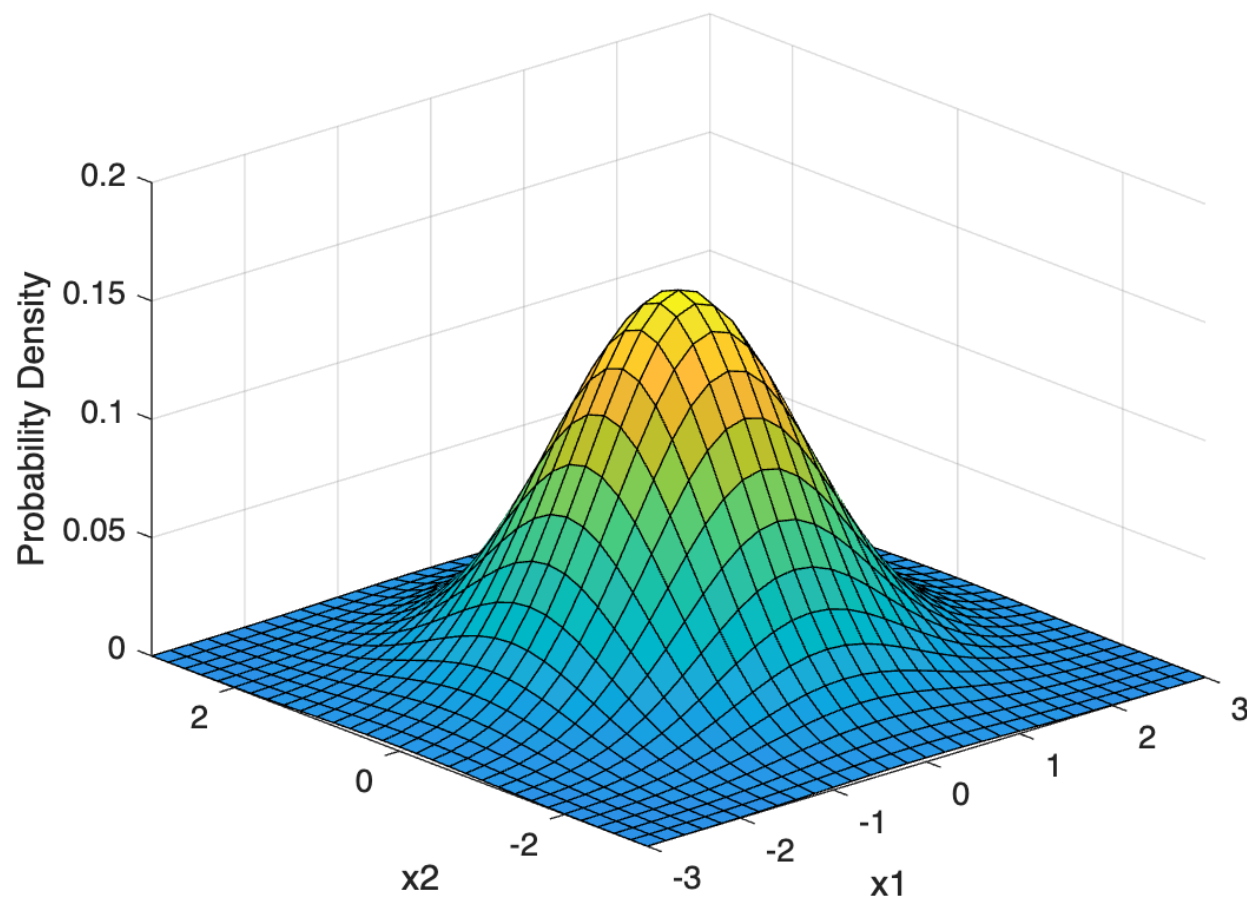
若严格外生性  $E[u_t | X] = 0$  成立，则误差项  $u$  均值独立于解释变量  $X$ 。

若  $X \perp\!\!\!\perp \mu_t$ ，则  $E[u_t | X] = E[u_t]$ 。此时可以直接假设  $E[u_t] = 0$ 。

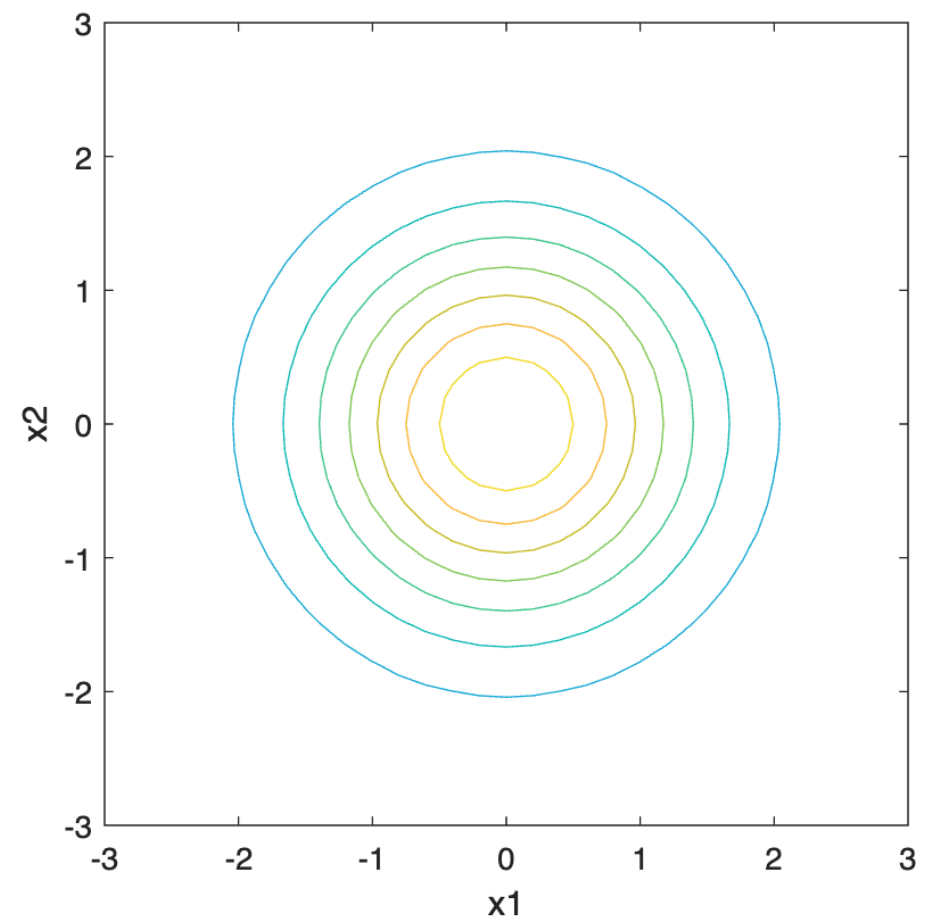
# 同方差无自相关性条件

## The Homoskedasticity & Non-autocorrelation Condition

$\text{Var}[\mathbf{u} | \mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbf{I}$  常被称为 spherical error, 或称误差项服从 spherical distribution (球面分布)。



pdf of bivariate  $N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$



contour plot

2D  $\rightarrow$  3D: circle  $\rightarrow$  sphere



$\hat{\beta}$  的非偏性和一致性

# 非偏性

## Unbiasedness

### 非偏性

若参数  $\theta$  的真实值是  $\theta_0$ ,  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的一个估计量。则称  $E[\hat{\theta}] - \theta_0$  为估计量  $\hat{\theta}$  的偏差 (bias) 或偏误。当  $E[\hat{\theta}] - \theta_0 = 0$ , 即

$$E[\hat{\theta}] = \theta_0$$

时,  $\hat{\theta}$  是非偏的。

### 估计量的一致性

若参数  $\theta$  的真实值是  $\theta_0$ ,  $\hat{\theta}^n$  是基于含有  $n$  个观测值样本的估计量。则当

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}^n = \theta_0 \quad \text{即当 } n \rightarrow \infty \text{ 时 } \hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

时,  $\hat{\theta}^n$  是一致的。

# 非偏性与一致性

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为独立随机样本，且每个  $x_i$  的总体均值为  $E[x_i] = \mu$ 。

已知在适当的条件下（例如总体方差有限，或服从同分布），样本均值  $\bar{x}$  是  $\mu$  的非偏统计量和一致估计量（大数定律）。

考虑下面三个  $\mu$  的估计量：

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n x_i &&= \frac{n}{n+1} \bar{x} \xrightarrow{P} \mu \\ \hat{\mu}_2 &= \frac{1.01}{n} \sum_{i=1}^n x_i &&= 1.01 \bar{x} \xrightarrow{P} 1.01\mu \\ \hat{\mu}_3 &= 0.01x_1 + \frac{0.99}{n-1} \sum_{i=2}^n x_i &&= 0.01x_1 + 0.99\bar{x} \xrightarrow{P} 0.01x_1 + 0.99\mu\end{aligned}$$

其中仅  $\hat{\mu}_1$  满足一致性，仅  $\hat{\mu}_3$  满足非偏性。

# $\hat{\beta}$ 的非偏性

假设  $\beta$  的真实值是  $\beta_0$ 。  $\beta$  的 OLS 估计量  $\hat{\beta}$  为

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T y \\ &= (X^T X)^{-1} X^T (X\beta_0 + u) \\ &= \beta_0 + (X^T X)^{-1} X^T u\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E[\hat{\beta}] = \beta_0 + E[(X^T X)^{-1} X^T u]$$

根据迭代期望定律，右侧第二项可以写成

$$\begin{aligned}E[(X^T X)^{-1} X^T u] &= E_X[E[(X^T X)^{-1} X^T u \mid X]] \\ &= E_X[(X^T X)^{-1} X^T E[u \mid X]]\end{aligned}$$

因此，当外生性条件  $E[u \mid X] = \mathbf{0}$  成立时，

$$E[(X^T X)^{-1} X^T u] = E_X[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow E[\hat{\beta}] = \beta_0 \quad (\hat{\beta} \text{ 是 } \beta \text{ 的非偏估计量})$$

时间序列数据往往不满足外生性，  
而只满足前定性。此时  $\hat{\beta}$  有偏。  
详见 D&M (2021) pp.90-92

# $\hat{\beta}$ 的一致性

$$\text{已知 } \hat{\beta} = \beta_0 + (X^\top X)^{-1} X^\top u$$

我们的目标是把右侧第二项的概率极限分解为

$$\left( \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X^\top X \right)^{-1} \left( \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X^\top u \right)$$

$X^\top X$  是  $k \times k$  矩阵, 其  $(i, j)$  要素是

$$\mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j = \sum_{t=1}^n x_{ti} x_{tj}$$

一般情况下不存在  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j$ , 但有可能存在  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{x}_i^\top \mathbf{x}_j$ 。

因为  $X^\top X = \sum_{t=1}^n X_t^\top X_t$ , 则根据大数定律,  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^\top X_t = E[X_t^\top X_t]$ , 因此

需要假设  $X_t$  是 IID 的随机样本

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} X^\top X = E[X_t^\top X_t] \equiv Q \Rightarrow \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (X^\top X)^{-1} = Q^{-1}$$

Theorem D.14 (Greene, 2020)

积的概率极限 = 概率极限之积, 即

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X^n = A, \text{plim}_{n \rightarrow \infty} Y^n = B \Rightarrow \text{plim}_{n \rightarrow \infty} X^n Y^n = AB$$

Theorem D.14 (Greene, 2020)

逆矩阵的概率极限

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} W^n = \Omega \Rightarrow \text{plim}_{n \rightarrow \infty} (W^n)^{-1} = \Omega^{-1}$$

书中将  $Q$  记为  $S_{X^\top X}$

# $\hat{\beta}$ 的一致性

接下来我们讨论  $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{u}$ 。

因为  $\mathbf{X}^\top \mathbf{u} = \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t^\top u_t$ ，则根据大数定律， $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t^\top u_t = E[\mathbf{X}_t^\top u_t]$ ，因此

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{u} = E[\mathbf{X}_t^\top u_t]$$

如果假设前定性  $E[u_t | \mathbf{X}_t] = 0$ ，则根据 LIE，

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}_t^\top u_t] &= E_{\mathbf{X}_t} [E[\mathbf{X}_t^\top u_t | \mathbf{X}_t]] = E_{\mathbf{X}_t} [\mathbf{X}_t^\top \cdot E[u_t | \mathbf{X}_t]] \\ &= E_{\mathbf{X}_t} [\mathbf{X}_t^\top \cdot 0] = \mathbf{0} \end{aligned}$$

因此， $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{X}^\top \mathbf{u} = E[\mathbf{X}_t^\top u_t] = \mathbf{0}$ 。

当样本为 **IID**，且满足前定性条件时（不需要外生性条件）， $\hat{\beta} = \beta_0 + (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{u}$  右侧第二项的概率极限为  $\mathbf{0}$ ，即  $\hat{\beta}$  是  $\beta$  的一致估计量。

# 关于非偏性与一致性的一些讨论

- 非偏性适用于任何大小的样本，而一致性仅适用于大样本。
- 保证  $\hat{\beta}$  的非偏性需要假设外生性，而保证  $\hat{\beta}$  的一致性只需要假设前定性。虽然前定性条件弱于外生性条件，但这并不代表非偏性可以推导出一致性，它们是两个不同的概念。非偏性只和期望值有关，而一致性是分布上的性质。
- 解释变量中包含被解释变量的滞后项 (lag) 的时间序列模型不满足外生性，但满足前定性。因此其 OLS 估计量有偏但一致。
- 非偏性并不一定是最好的性质。有时我们需要在非偏但方差很大的估计量和略偏但方差很小的估计量中进行选择。
- 不满足一致性有两种情况：一种是概率极限不存在（不收敛），另一种是概率极限存在但不收敛于真实的参数值。