

博弈论 (0202860001)

第一次作业

一、雪堆博弈

公地悲剧 (the tragedy of commons) 问题是经济学研究领域的一个著名问题，它指的是在面对免费的共有资源时，如果每个个体都以利己的方式消耗资源，最终会导致资源枯竭的情形。和公地悲剧有异曲同工之意的是搭便车问题，其中一个著名的例子是雪堆博弈 (snowdrift game)。

假设在北方的冬天，有两辆车对向行驶在一条乡间小路上，而在它们中间有一个雪堆阻断了道路。两个驾驶人都想尽快达到目的地，但是必须将路上的积雪清理后才能通行。假设两人到达目的地会各自获得 100 收益，清理积雪的体力成本为 50。如果两人都参与清理积雪，则平均分担体力成本。如果没人清理积雪，则双方都因无法到达目的地而获得 0 收益。



图像来源: <https://wiki.snowdrift.coop/about/snowdrift-dilemma>

回答下面的问题：

1. 假设参与人的备选行动集为 $\{C, F\}$ ， C 代表参与清雪， F 代表不参与清雪（搭便车）。写出博弈矩阵。
2. 找出所有纳什均衡。

二、反复剔除严格劣势策略

考虑下列双矩阵博弈并回答问题

	W	X	Y	Z
A	5, 4	4, 4	4, 5	12, 2
B	3, 7	8, 7	5, 8	10, 6
C	2, 10	7, 6	4, 6	9, 5
D	4, 4	5, 9	4, 10	10, 9

问题：

1. 找出两种不同的反复剔除严格劣势策略的方法。
2. 找出所有纳什均衡。

博弈论 (0202860001)

第一次作业参考答案

一、雪堆博弈

1. 博弈矩阵

	C	F
C	75, 75	50, 100
F	100, 50	0, 0

2. 纳什均衡

两个显而易见的纯策略纳什均衡是 (C, F) 和 (F, C) 。下面我们尝试寻找混合策略纳什均衡。令参与人 1 的策略为 $(p, 1-p)$ ，参与人 2 的策略为 $(q, 1-q)$ 。面对 $(q, 1-q)$ ，参与人 1 选择 C 的期望收益是

$$75q + 50(1-q) = 50 + 25q,$$

而选择 F 的期望收益是

$$100q + 0(1-q) = 100q,$$

因此，他在 $50 + 25q \geq 100q \Leftrightarrow q \leq 2/3$ 时的最佳响应是 $p = 1$ ，在 $q \geq 2/3$ 时的最佳响应是 $p = 0$ ，在 $q = 2/3$ 时的最佳响应是任意的 $0 \leq p \leq 1$ 。

与此类似，面对 $(p, 1-p)$ ，参与人 2 选择 C 的期望收益是

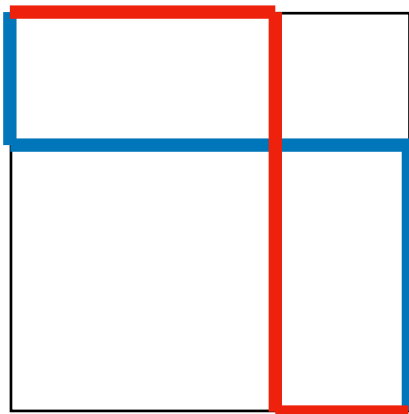
$$75p + 50(1-p) = 50 + 25p,$$

而选择 F 的期望收益是

$$100p + 0(1-p) = 100p,$$

因此，他在 $50 + 25p \geq 100p \Leftrightarrow p \leq 2/3$ 时的最佳响应是 $q = 1$ ，在 $p \geq 2/3$ 时的最佳响应是 $q = 0$ ，在 $p = 2/3$ 时的最佳响应是任意的 $0 \leq q \leq 1$ 。

因此，纳什均衡的集合为 $\{(1, 0), (0, 1), (2/3, 1/3), (2/3, 1/3)\}$ ，也可以简写为 $(p^*, q^*) \in \{(1, 0), (0, 1), (2/3, 2/3)\}$ 。



二、

	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
<i>A</i>	<u>5</u> , 4	4, 4	4, <u>5</u>	<u>12</u> , 2
<i>B</i>	3, 7	<u>8</u> , 7	<u>5</u>, <u>8</u>	10, 6
<i>C</i>	2, <u>10</u>	7, 6	4, 6	9, 5
<i>D</i>	4, 4	5, 9	4, <u>10</u>	10, 9

1. 反复剔除严格劣势策略

方法一：剔除 Z （严格劣于 Y ）；剔除 C （严格劣于 B ）；剔除 W 和 X （严格劣于 Y ）；剔除 A 和 D （严格劣于 B ）。

方法二：剔除 C （严格劣于 B ）；剔除 W, X 和 Z （严格劣于 Y ）；剔除 A 和 D （严格劣于 B ）。

2. 根据上一问的结果可知，唯一的纳什均衡是 (B, Y) 。利用划线法也可知 (B, Y) 是纳什均衡，但无法证明它是唯一的。