博弈论 (0202860001)
第二次作业

一、一种卡牌游戏

假设两个人在玩儿一种非常简单的卡牌游戏。游戏使用的卡牌中仅包含大牌和小牌，且大小牌的数量相等。游戏开始时，两人都需要先下注 1 元。随后，参与人 1 会随机分得一张牌。参与人 2 无法看到参与人 1 的牌。此时，参与人 1 首先从“结算”和“加注”之间进行选择。当选择“结算”时，如果手中的牌是大牌，则参与人 1 获得所有已下注金额，如果是小牌，则参与人 2 获得所有已下注金额，之后游戏结束。当选择“加注”时，则参与人 1 增加 1 元的赌注，之后由参与人 2 进行选择。参与人 2 此时可以选择“放弃”或“跟注”。如果选择“放弃”，则参与人 1 获得所有已下注金额，之后游戏结束。如果选择“跟注”，则参与人 2 也增加 1 元的赌注，随后进行清算。如果参与人 1 手中的牌是大牌，则参与人 1 获得所有已下注金额，如果是小牌，则参与人 2 获得所有已下注金额，之后游戏结束。参与人的收益是游戏结束时所获得金额和自己下注的总金额之差。

回答下面的问题：

1. 画出博弈树。
2. 证明此博弈不存在纯策略纳什均衡。
3. 扩展式博弈的混合策略纳什均衡就是其对应的策略式博弈的混合策略纳什均衡。证明下列策略组合是这个卡牌游戏唯一的混合策略纳什均衡：

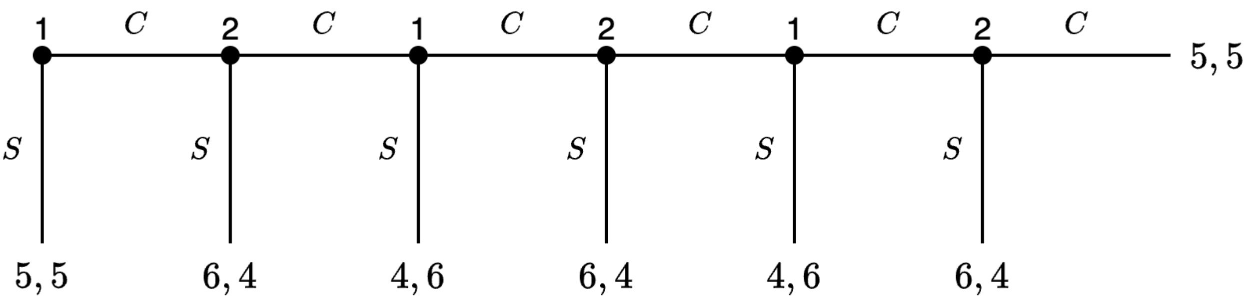
   参与人 1 以 $1/3$ 的概率选择（持有大牌时加注，持有小牌时加注），以 $2/3$ 的概率选择（持有大牌时加注，持有小牌时结算）；参与人 2 以 $1/3$ 的概率选择放弃，以 $2/3$ 的概率选择跟注。

   （注：这个策略组合中，参与人 1 有 $1/3$ 的概率在持有小牌时加注，这在德州扑克一类的扑克牌游戏中称为 bluffing，即虚张声势或诈唬）

二、如何避免内卷

内卷化是当今中国社会的时代特征之一，它描述了一种过度竞争但没有获得预期增长的状态。下面我们用序贯博弈对内卷化现象进行简单建模。假设两个大学生为了获得推免加分而在志愿服务时长上进行竞争。学院赋予此项活动的总加分为 10 分，最多分配给两个满足条件的学生。如果两人完成的时长相等，则各自获得 5 分。如果不相等，则完成时长更多者获得 6 分，更少者获得 4 分。现在两人完成的志愿服务时长相等且高于其他人，在此条件下双方都会获得 5 分的加分。此时参与人 2 认为如果参与人 1 不增加时长，则自己也不会增加时长。博弈由参与人 1 首先从不增加时长（S）和增加时长（C）中进行选择，如果

选择 S，则双方的收益都是 5。如果他选择 C，则由参与人 2 继续进行选择。参与人 2 的备选项也是 S 和 C。由于她观察到参与人 1 增加了时长，此时如果选 S，则自己的志愿服务时长小于参与人 1 的志愿服务时长，双方获得的加分是 $(6,4)$。如果参与人 2 选择 C，那么好胜心驱使她决定要比参与人 1 完成更长的志愿服务时长。因此如果接下来参与人 1 选择 S，则双方获得的加分是 $(4,6)$。如果选择 C，则由参与人 2 继续进行选择……。博弈在任意一方选择 S 时结束，或者在双方都进行了三次选择时强制结束。如果参与人 2 在最后回合选择了 C，则假设双方获得的加分是 $(5,5)$，这可以理解为评分规则中避免过度竞争的一种保护机制，即当两个人的志愿服务时长都大于某一上限值时就不再区分高下。此博弈的博弈树见下图。



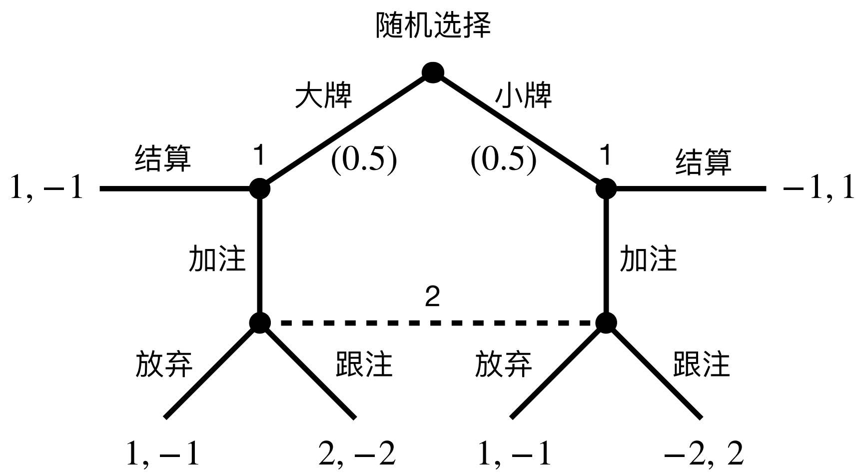
回答下面的问题：

1. 用逆向归纳法找出所有纯策略子博弈完美均衡。
2. 找出所有纯策略纳什均衡。它们有什么共同之处?
3. 附加题：讨论是否存在既能保证公平又能避免内卷的加分规则?

博弈论 (0202860001)
第二次作业参考答案

一、一种卡牌游戏

1. 博弈树



2. 对应的双矩阵博弈

		参与人 2	
		放弃	跟注
参与人 1	（持有大牌时结算，持有小牌时结算）	$0, \underline{0}$	$0, \underline{0}$
	（持有大牌时结算，持有小牌时加注）	$\underline{1}, -1$	$-0.5, \underline{0.5}$
	（持有大牌时加注，持有小牌时结算）	$0, \underline{0}$	$\underline{0.5}, -0.5$
	（持有大牌时加注，持有小牌时加注）	$\underline{1}, -1$	$0, \underline{0}$

由划线法可知，此博弈不存在纯策略纳什均衡。

3. 证明：

首先，参与人 1 的策略（持有大牌时结算，持有小牌时结算）严格劣于混合策略 $\frac{1}{2}$（持有大牌时加注，持有小牌时结算）$+\frac{1}{2}$（持有大牌时加注，持有小牌时加注），因此在任何混合策略纳什均衡中，该策略的概率都为零。

现在考虑混合策略组合 $\big((0, p_1, p_2, 1-p_1-p_2), (q, 1-q)\big)$。针对参与人 2 的策略 $(q, 1-q)$，参与人 1 的三个策略对应的期望收益分别是

（持有大牌时结算，持有小牌时加注）：$q-0.5(1-q)=1.5q-0.5$

（持有大牌时加注，持有小牌时结算）： $0.5 - 0.5q$

（持有大牌时加注，持有小牌时加注）： q

已知不存在纯策略纳什均衡，因此在均衡中参与人 2 的策略需满足 $0 < q < 1$。当 $q < 1$ 时，$1.5q - 0.5 < q$，因此（持有大牌时结算，持有小牌时加注）不是参与人 1 的最佳响应，由此可得 $p_1 = 0$。参与人 1 的最佳响应函数是

$$\beta_1(q,1-q) = \begin{cases} \{(0,0,1,0)\} & \text{if } q < \frac{1}{3} \\ \{(0,0,p,1-p) \mid 0 < p < 1\} & \text{if } q = \frac{1}{3} \\ \{(0,0,0,1)\} & \text{if } q > \frac{1}{3} \end{cases}$$

针对参与人 1 的策略 $(0, 0, p, 1-p)$，参与人 2 的两个策略的期望收益分别是

放弃：$-(1-p) = p - 1$

跟注：$-0.5p$

因此，参与人 2 的最佳响应函数是

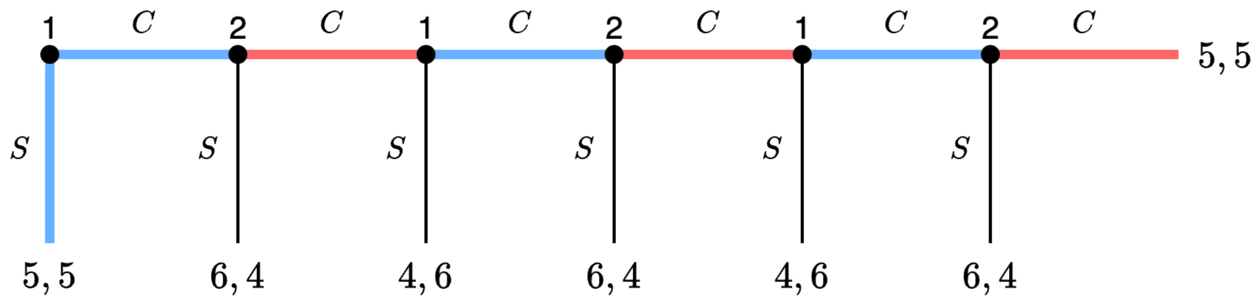
$$\beta_2(0,0,p,1-p) = \begin{cases} \{(1,0)\} & \text{if } p > \frac{2}{3} \\ \{(q,1-q) \mid 0 < q < 1\} & \text{if } p = \frac{2}{3} \\ \{(0,1)\} & \text{if } p < \frac{2}{3} \end{cases}$$

由于不存在纯策略纳什均衡，唯一的纳什均衡是 $\beta_1(1/3)$ 和 $\beta_2(2/3)$ 的交点，即

$$\big((0,\ 0,\ 2/3,\ 1/3),\ (1/3,\ 2/3)\big)$$

二、内卷

1. 子博弈完美均衡



纯策略子博弈完美均衡的路径见上图。均衡策略是 (SCC, CCC) 和 (CCC, CCC)，后者对应内卷现象。由于两个均衡的收益相同，因此理性的参与人们无法从二者之间进行选择。虽然首先进行选择的参与人 1 能够决定是否避免内卷，但并没有让他做出这种选择的激励。相反，如果他认为参与人 2 有可能因为不够理性而在最后一回合之前选择 S，那么他在第一回合选择 C 就优于选择 S，从而导致内卷发生。

2. 纳什均衡

	SSS	CSS	SCS	SSC	CCS	CSC	SCC	CCC
SSS	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	**5, 5**
CSS	6, 4	4, 6	6, 4	6, 4	4, 6	4, 6	6, 4	4, 6
SCS	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	**5, 5**
SSC	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	**5, 5**
CCS	6, 4	6, 4	6, 4	6, 4	4, 6	6, 4	6, 4	4, 6
CSC	6, 4	4, 6	6, 4	6, 4	4, 6	4, 6	6, 4	4, 6
SCC	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	5, 5	**5, 5**
CCC	6, 4	6, 4	6, 4	6, 4	6, 4	6, 4	6, 4	**5, 5**

由划线法可知，纯策略纳什均衡共有五个，分别为 (SSS, CCC), (SCS, CCC), (SSC, CCC), (SCC, CCC), (CCC, CCC)。它们的共同之处是参与人 2 永远不会选择 S，而参与人 1 如果在第一回合选 C 则在后面的回合都不会选 S。

3. 公平且能避免内卷的加分规则

达标制可能是避免内卷的有效方法。具体地说就是对任何完成志愿服务时长标准的学生都赋予相同的加分。在达标制下，完成更多时长不会带来更多收益，因此理性参与人不会选择增加时长。同时达标制也提供了最基本的公平性，即做得更多的人获得的回报不会小于做得更少的人。