

博弈论

第一讲：绪论

黄嘉平

深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

电子邮箱： huangjp@szu

课程网站： <https://huangjp.com/GT/>

微观经济学理论概览

核心理论

个人选择

消费者：效用最大化

生产者：利润最大化

市场机制

局部均衡：单一商品的价格

一般均衡：多产品市场中的价格与分配

- 福利经济学第一定理：
每个均衡都对应一个帕雷托最优配置
- 福利经济学第二定理：
(在一定条件下) 每个帕雷托最优配置
都对应一个初始禀赋下的均衡

核心理论的基本假设

- 完全竞争市场：没有个体可以通过自身的选择影响市场价格
- 对称信息：所有个体可获得的信息都是一样的
- 完全理性：个体决策都是基于效用或利润的最大化

扩展

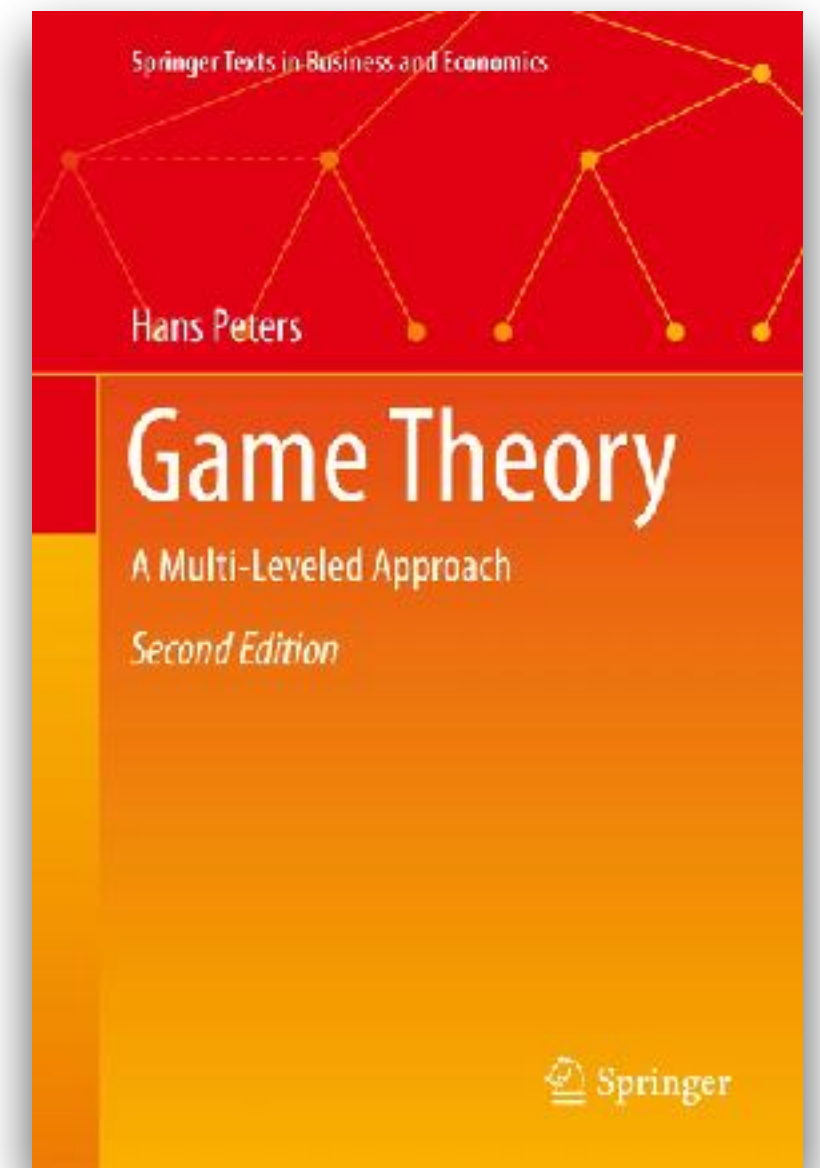
- 不完全竞争市场 → 产业组织论
- 非对称信息 → 信息经济学
- 有限理性决策 → 行为经济学
- 其他：企业、外部性、公共品等

理论工具

- 最优化理论：个体决策的基础理论
- 博弈论：多人决策问题的分析工具

课程基本信息

- 课程网站: <https://huangjp.com/GT/>
- 教学辅助工具: 深圳大学教学平台
- 成绩评价: 出席情况 10% + 课堂表现 10% + 作业 20% + 期末考核 60%
- 主要参考书:
Peters, H. (2015). *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*, 2nd Edition. Springer.
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-46950-7>
可通过 [深圳大学图书馆](#) > [数据库](#) > [Springer Nature 电子图书](#) 下载 PDF 版本
- 讲义: 内容基于 Peters (2015) 的第 1 ~ 6、9、10 章, 涵盖非合作博弈与合作博弈的基本内容, 可在课程网站查看



课程特点与要求

- 对数学基础的要求不高，认真学习高数和线性代数的同学应该不存在理解障碍。
- 需要一定的经济学知识和洞察力。
- 我们的目的不是学会做题，而是理解方法并能够正确应用。需要有较强的自学能力，愿意主动思考。
- 鼓励在课堂上提问并参与讨论。
- 关于生成式人工智能：
 - 作为辅助学习的工具：**不推荐**也不禁止，使用中带来的一切后果由使用者自负
 - **禁止**在作业和期末报告中使用时由 AI 生成的文本

学习目标与考核方式间的对应关系

学习目标	考核方式			
	出席	课堂提问	作业	期末考核
Level 1 理解基本概念及思维方式	—	✓	✓	✓
Level 2 会运用所学方法解答教材或教师给出的练习题	—		✓	✓
Level 3 会运用所学方法对实际问题进行建模分析	—			✓

什么是博弈论？

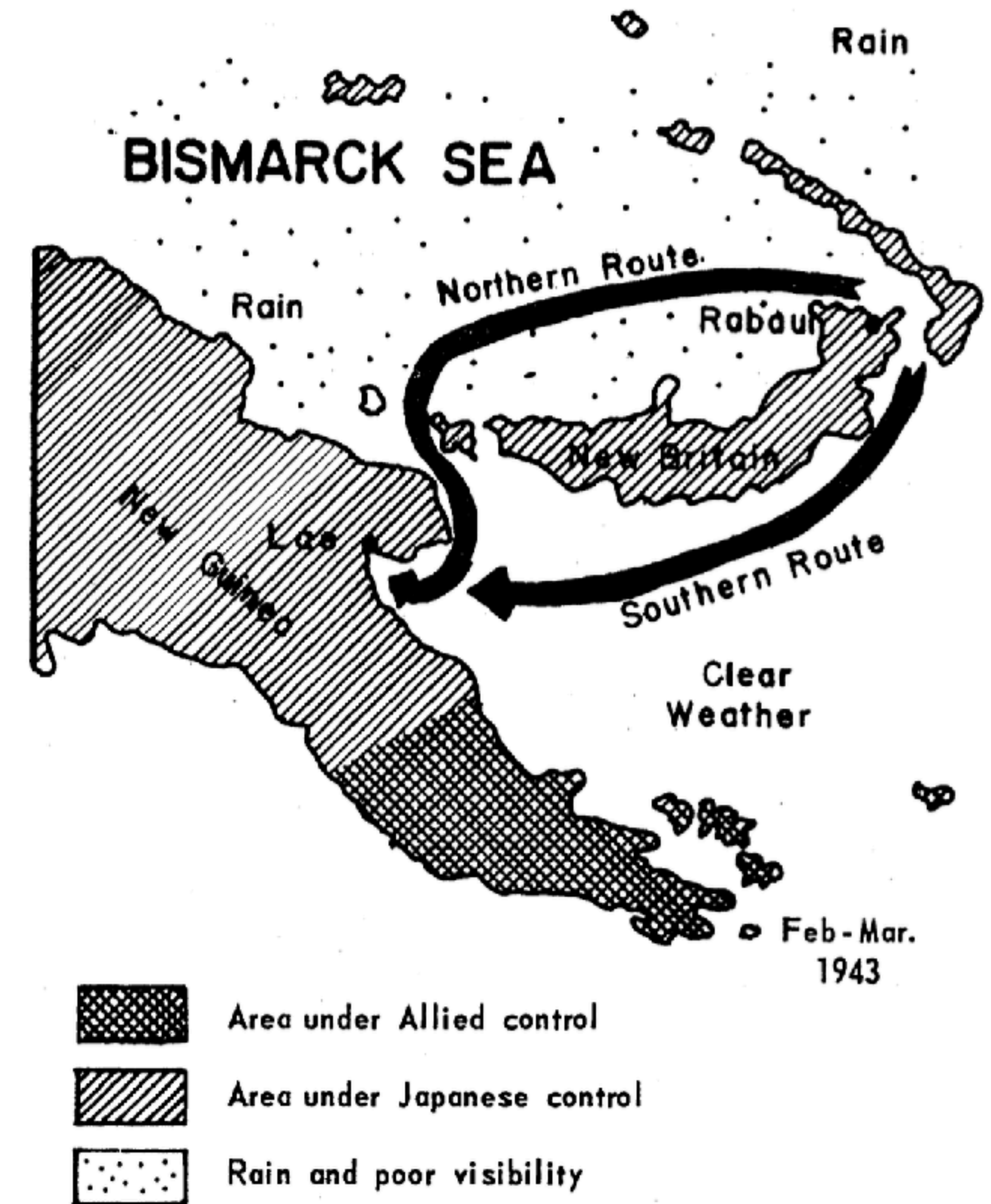
- 博弈论研究的是多人间的**竞争**与**合作**
 - **竞争**：参与人之间存在潜在的利益冲突，且各自的利益受自身和他人行为的影响 ➡ 非合作博弈
 - **合作**：参与人可以通过合作提升集体利益 ➡ 合作博弈
- 目的（博弈的解）
 - 非合作博弈：参与人如何在不同的行动之间作出最佳**选择**
 - 合作博弈：如何对合作产生的总收益（或总费用）进行**分配**
- 典型应用方向：
 - 产业组织（由少数企业形成的市场）、数字经济（平台经济）
 - 机器学习（例如 AlphaGo）
 - 机制设计（拍卖、器官移植的最优匹配方法等）

一些博弈的例子

零和博弈 (zero-sum game)

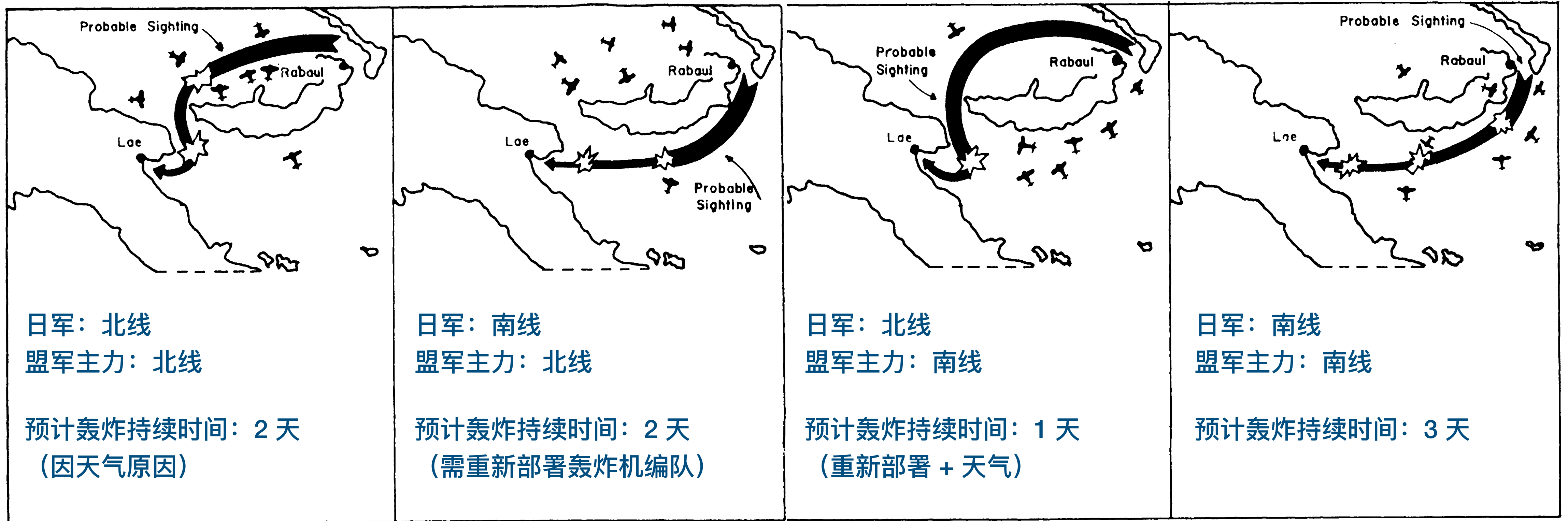
1. 俾斯麦海海战

- 1943年的太平洋战争中，日军为争夺对新几内亚岛的控制权，计划从新不列颠岛的拉包尔（Rabaul）运送陆军士兵到新几内亚岛的莱城（Lae）。盟军情报部门事先获取了这一消息，并计划出动轰炸机拦截运输船队。
- 日军有两条行进路线可以选择，分别是北线和南线。两条路线都需要走 3 天。天气预报显示前两天北线海域为雨雾天气，能见度差，南线海域天气持续晴朗。
- 盟军需要选择将主力轰炸机队派往北线或者南线。北线海域因视野不好，预计需要 1 天时间才能发现日军船队的位置。
- 双方都面临同样的决策问题：选择北线还是南线。



零和博弈 (zero-sum game)

1. 俾斯麦海海战



零和博弈 (zero-sum game)

1. 俾斯麦海海战

- 这是一个典型的多人决策问题。日军指挥官和盟军指挥官都需要作出自己的选择，但是却无法单独决定战争的结果。日军指挥官希望最大限度的减少损失，而美军指挥官希望最大限度的造成伤害。双方的选择都是**独立且同时**进行的。
- 如果我们将持续轰炸天数作为盟军的收益，将该天数的负数作为日军的收益，上述情形可以用一个简单的矩阵表达。
- 右侧的矩阵中只写出了盟军的收益。因为双方的收益之和为零，就没有必要标出日军的收益。
- 这是一个典型的**二人零和博弈**。例子中的盟军和日军称作**参与者 (player)**。盟军为行参与者 (row player)，因为他可以选择的**行动 (action)** 体现为矩阵的行。日军为列参与者 (column player)。在二人博弈中，我们通常把行参与者称为参与者 1，把列参与者称为参与者 2。

		日军	
		北线	南线
盟军	北线	2	2
	南线	1	3

注：也有文献把 player 翻译成“局中人”。

零和博弈 (zero-sum game)

1. 俾斯麦海海战

		日军	
		北线	南线
盟军	北线	2	2
	南线	1	3

- “解”一个博弈意味着对参与人的选择作出合理预测。
- 预测日军指挥官的选择比较容易。对于他而言，无论对手怎样选择，自己选择北线都不会比南线差。我们称北线优于南线，南线劣于北线。日军应当选择北线。
- 盟军指挥官的选择题则相对更加复杂。当对手选择北线时，自己也应该选择北线；而如果对手选择了南线，自己也应该选择南线。这称为**最佳响应 (best reply/response)** 策略。仅凭这个逻辑是不足以作出判断的，重要的是盟军指挥官也了解对手面临的情况，知道北线是对方的最优选择。因此，此时盟军也应当选择北线。
- (北线, 北线) 的行动组合是我们对参与人选择的预测，是这个博弈的一个解。而历史上双方的选择也和我们的预测一致，俾斯麦海海战以日军大败而告终。
- 那么日军指挥官的选择错了吗？

零和博弈

2. 猜硬币 (matching pennies)

- 两个参与者各有一枚硬币。他们需要同时展示出硬币的一面，如果出现的面相同则参与者 1 会赢得参与者 2 的硬币，反之则参与者 2 赢得参与者 1 的硬币。
- 这个博弈的矩阵表达为右图所示。今后我们将默认参与者 1 为行参与者，矩阵中的数字为参与者 1 的收益。
- 在这个例子里，双方都没有优势策略，因此也没有看起来比较自然的解。
- 解决问题的一个办法是允许参与者依某个概率分布随机选择行动，这被称为**混合策略 (mixed strategy)**。混合策略可以理解为其他参与者对自己的选择作出的预测，也可以理解为当博弈反复进行时选择特定行动的频率。

	正	反
正	1	-1
反	-1	1

零和博弈

2. 猜硬币 (matching pennies)

	正	反
正	1	-1
反	-1	1

- 令参与人 1 选择正面的概率为 p ，参与人 2 选择正面的概率为 q 。此时我们可以计算二人的期望收益。
- 参与人 1 的期望收益是

$$\begin{aligned} & p[q \cdot 1 + (1 - q) \cdot (-1)] + (1 - p)[q \cdot (-1) + (1 - q) \cdot 1] \\ &= p(2q - 1) - (1 - p)(2q - 1) = (2p - 1)(2q - 1) \end{aligned}$$

- 参与人 2 的期望收益是

$$\begin{aligned} & q[p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot 1] + (1 - q)[p \cdot 1 + (1 - q) \cdot (-1)] \\ &= q(1 - 2p) - (1 - q)(1 - 2p) = -(2p - 1)(2q - 1) \end{aligned}$$

- 一种比较稳妥的选择方式：假设对手会想方设法降低自己的收益，而自己能做的是在此基础上作出最优选择。对于参与人 1 来说这是将最小收益最大化，称作 maximin 策略；而对于参与人 2 来说这是将最大损失最小化，称作 minimax 策略。
- 策略组合 $(p = 0.5, q = 0.5)$ 是唯一的 maximin 策略和 minimax 策略的组合，因此可以作为此博弈的解。

非零和博弈

1. 囚徒困境 (prisoner's dilemma)


- 这是一个非常著名的例子。两个人因共同犯罪的嫌疑被捕，但是警方的客观证据不足，需要嫌犯口供才能起诉。因此警方将二人分开审理。
- 两个嫌疑人都有两种选择，一是和同伙串供，通常称为（与同伙）合作 (cooperation, C)，二是指证同伙犯罪，通常称为背叛 (defect, D)。被指证的嫌疑人将被起诉 10 年徒刑，而没有被指证的则只能被起诉 1 年。指证同伙可以因配合警方而获得 1 年减刑。
- 此博弈可以用右侧的矩阵表达。与之前的例子不同的是，此时双方的收益之和不再是零。因此，矩阵的每一个元素都包含两个数字，第一个是参与者 1 的收益，第二个是参与者 2 的收益。

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

非零和博弈

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

1. 囚徒困境 (prisoner's dilemma)

- 对每个参与人来说，无论对方如何选择，自己选择背叛 (D) 都会带来更高的收益。因此 (D, D) 是此博弈的解。
- 然而，很明显 (C, C) 比 (D, D) 给双方带来的收益都会更高。这说明 (D, D) 的收益不是帕雷托最优的。双方虽然都进行了合理的选择，但结果却并不令人满意，因此称之为“困境”。
- (D, D) 的组合同时也是**纳什均衡 (Nash equilibrium)**。也就是说，在固定对方策略不变的前提下，双方都无法通过改变策略而提高自己的收益。
- 与囚徒困境博弈类似的例子还有公地悲剧 (tragedy of the commons)。例如，几个牧场主共享一块天然草场。每个牧场主都想通过增加  的数量来提高自己的收益，但是成本 (草) 确是由大家共同承担的。最极端的情况是草被吃完了，所有牧场主的收益都归零。这里也出现了个人理性决策无法达成社会最优状态的情况。

非零和博弈

2. 性别战 (battle of sexes)

- 有一对情侣准备出去约会。他们可以选择去看足球赛或者看芭蕾舞。由于双方的喜好不同，他们只事先约定了约会时间，并没有约定地点。假设在约会当天，出于某些原因（例如其中一人的手机没电了）他们无法联络沟通，只能自己从足球和芭蕾之间作出选择。
- 假设男人更喜欢看足球赛，女人更喜欢看芭蕾舞。两人都希望和对方一起度过这段时间，因此孤身一人时的收益（或效用）为零。我们设男人为参与者 1（行参与者）。
- 此博弈的矩阵表达如右图所示。
- 是否存在优势策略？
- 是否存在纳什均衡？

	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

非零和博弈

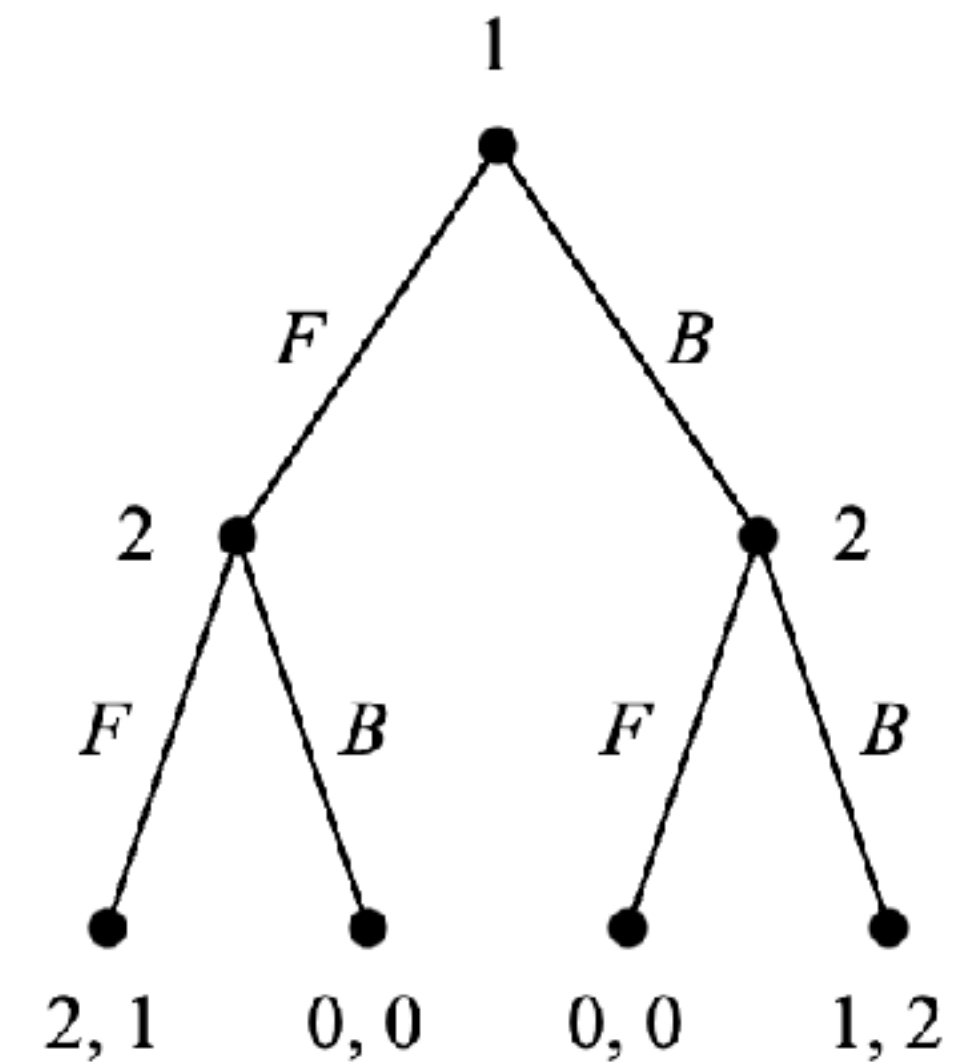
3. 古诺博弈 (a Cournot game)

- 这是非常经典的寡头市场模型。假设两家公司生产同一种产品，该产品的市场价格由总产量 Q 决定，即 $p = \max\{1 - Q, 0\}$ 。假设生产该产品不需要成本。
- 参与者 i ($i = 1, 2$) 的利润函数是 $K_i(q_1, q_2) = q_i \cdot \max\{1 - q_1 - q_2, 0\}$
- 双方需要决定自己的产量 $q_i \in \mathbb{R}$ 。
- 双方的行动集 (action set) 都是无限的，因此无法用矩阵表达。但是我们依然可以想办法计算纳什均衡。
- 确认 $(q_1, q_2) = (1/3, 1/3)$ 是纳什均衡，即双方的策略互为最佳响应。
- 确认这个纳什均衡的收益不是帕雷托最优。你更找到它的帕雷托改进吗？

扩展式博弈

博弈树

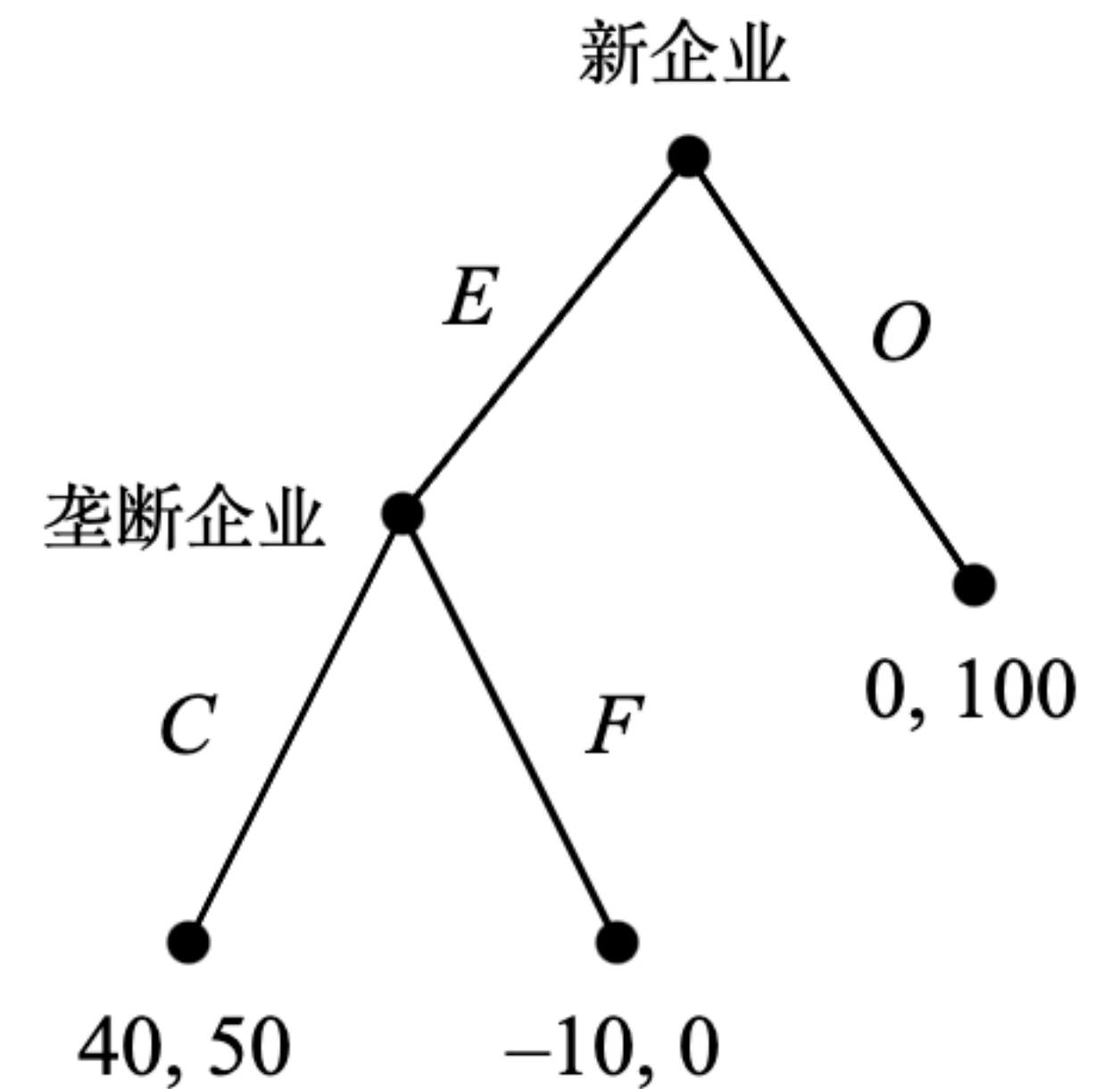
- 前面的例子都是参与人同时进行决策。很多时候，参与人是按照一定的顺序依次进行决策，这类博弈称为**序贯博弈 (sequential game)**。我们用扩展式博弈 (extensive form game) 来描述这类情形。
- 扩展式博弈通常以**博弈树 (game tree)** 的形式表达。
- 树是图论中的概念，是图 (graph) 的一种。树由节点 (node) 和边 (edge) 组成，但不能包含环 (cycle)。节点中有一个根节点 (root) 和一些终点 (end node, 或称叶 leaf)。终点以外的节点都是决策节点，即某一参与人需要进行决策。
- 右图是参与人 1 首先行动的序贯性别战博弈的博弈树。



扩展式博弈

1. 市场进入与威慑 (entry deterrence)

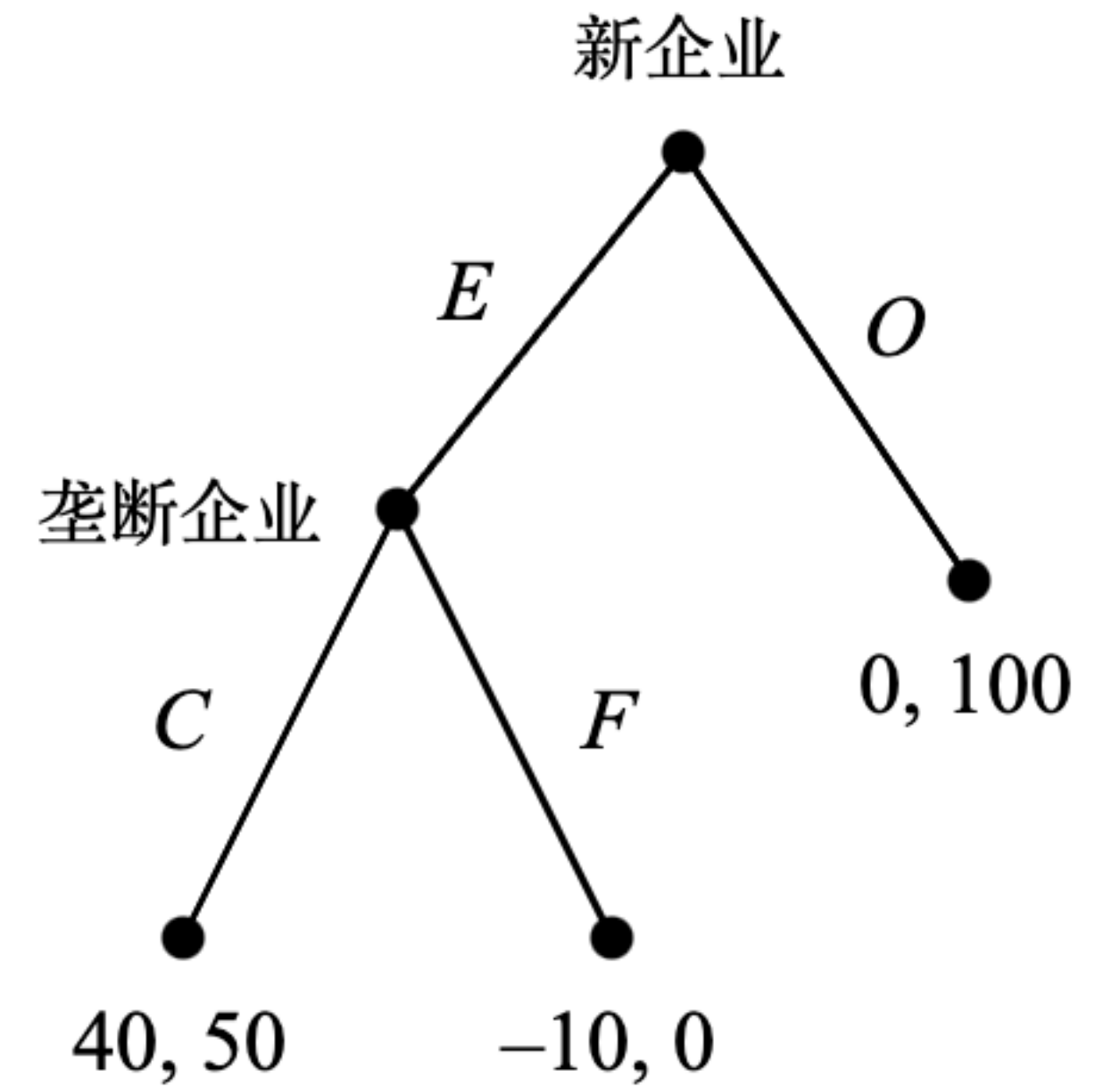
- 在产业组织论中有一个古老的问题，就是垄断企业如何应对新企业的出现。常见的策略是以降低价格作为防御手段阻止新企业进入市场。
- 在经典的市场进入模型中，新企业首先选择是否进入该市场，之后垄断企业选择是否开始价格战。假设该市场在垄断价格下的利润为 100，在价格战下为 0。如果垄断企业选择不进行价格战（即共谋，collusion），则双方平分垄断价格下的利润。新企业进入市场的成本是 10。
- 博弈树见右图。



扩展式博弈

1. 市场进入与威慑 (entry deterrence)

- 此类博弈可以通过**逆向归纳法 (backward induction)** 来解。
- 我们从最后一个进行决策的参与者开始，在这个博弈中就是垄断企业。根据收益的比较可知，在新企业选择进入市场时，垄断企业选择共谋 (C) 要优于选择价格战 (F)。
- 新企业也知道垄断企业的判断逻辑，因此也认同上面的结果并将其纳入自己的决策过程。当他进行选择时，他可以认为进入市场 (E) 带来的收益是 40。因此进入市场 (E) 是最好的选择。
- 综上所述，逆向归纳法的结果是策略组合 (E, C)，这也称为**子博弈完美纳什均衡 (subgame perfect Nash equilibrium)**。



扩展式博弈

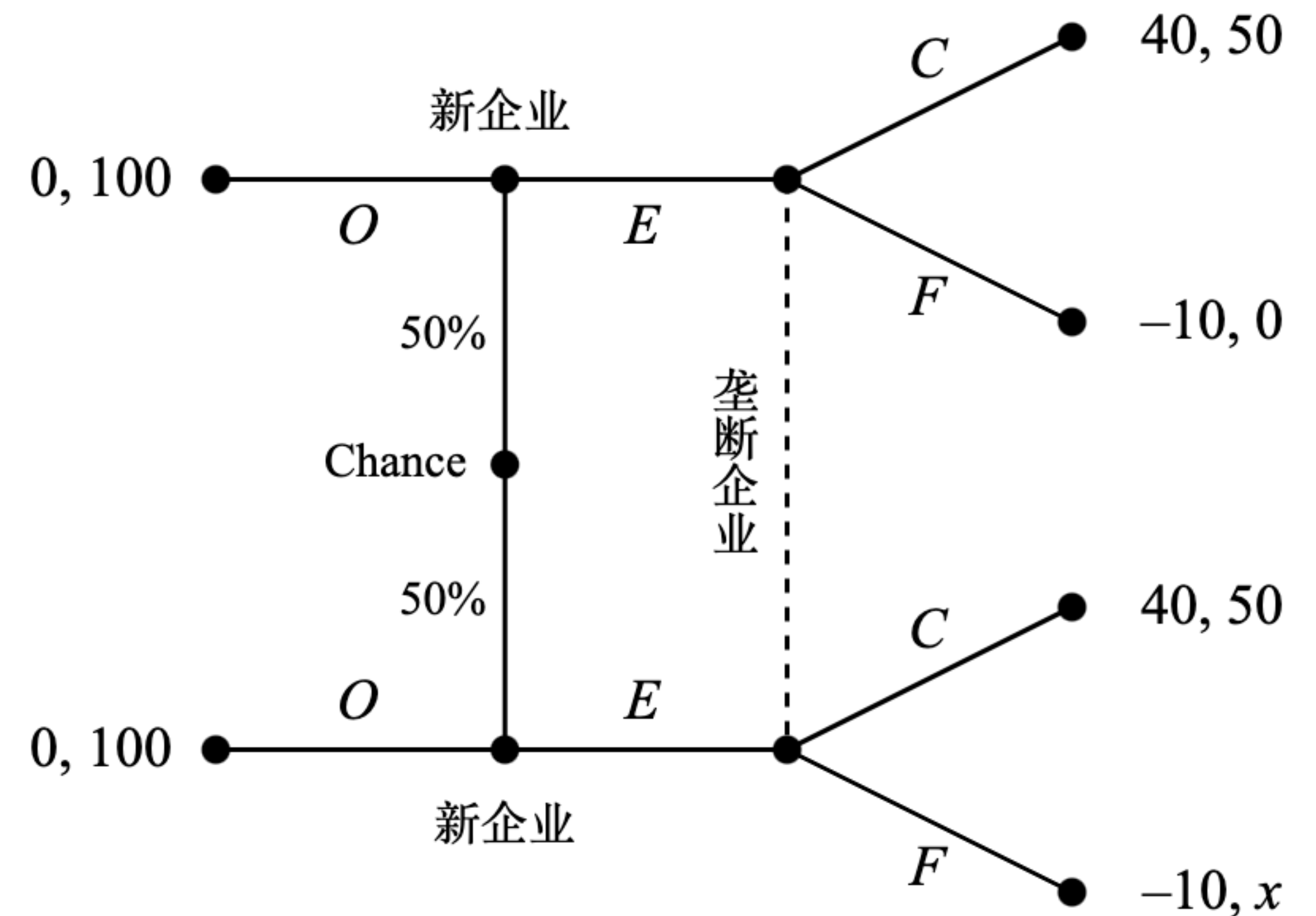
2. 存在不完全信息的市场进入与威慑 (entry deterrence with incomplete info.)

- 现在我们假设垄断企业在进行价格战时有 50% 的概率可以获得正收益 x 。这可能因为他对新企业了解得不够充分，而新企业可能没有足够能力将价格战进行到底。
- 新企业依然首先进行选择，并且知道垄断企业在选择 F 时的收益是 0 还是 x 。因为他非常了解自身的情况。换句话说，这是新企业的私密信息 (private information)，而垄断企业只掌握了不完全信息 (incomplete information)。
- 为了描述这种情形，我们在博弈树中加入随机选择 (chance move) 节点。也可以理解为决策系统外部存在一个特殊的决策者 (称为 nature)，它的作用是随机地选择参与人的不同类型 (例如新企业的能力)，但自身不会产生收益。

扩展式博弈

2. 存在不完全信息的市场进入与威慑 (entry deterrence with incomplete info.)

- 博弈以随机选择开始，之后是新企业进行决策，最后是垄断企业。
- 为了表达垄断企业无法区分不同类型的新企业，我们将垄断企业的两个决策节点用虚线连接。以虚线连接在一起的决策节点的集合称为**信息集 (information set)**。出于信息集上的决策者作出的选择适用于所有该信息集内的节点。
- 适用于这类博弈的解的概念是**完美贝叶斯均衡 (perfect Bayesian equilibrium)**。我们将在后面的课程中介绍。



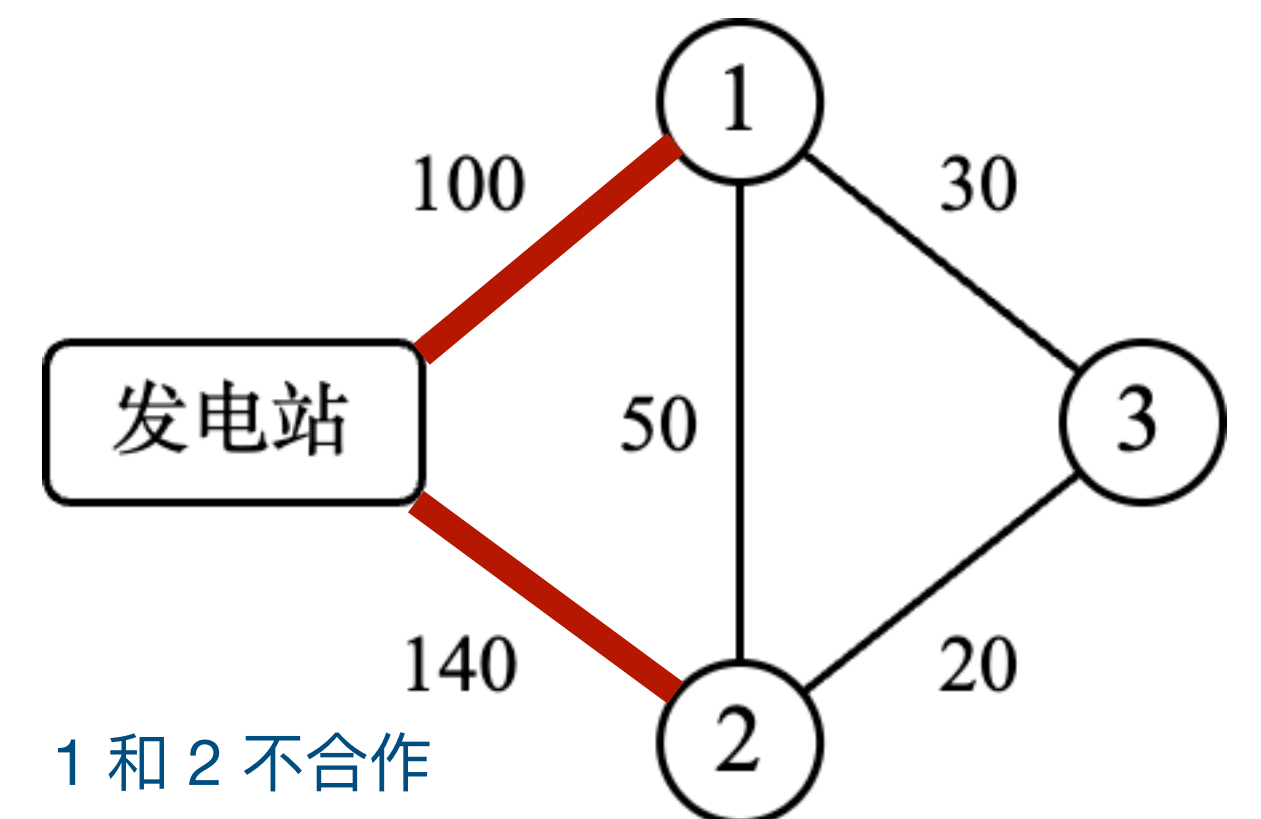
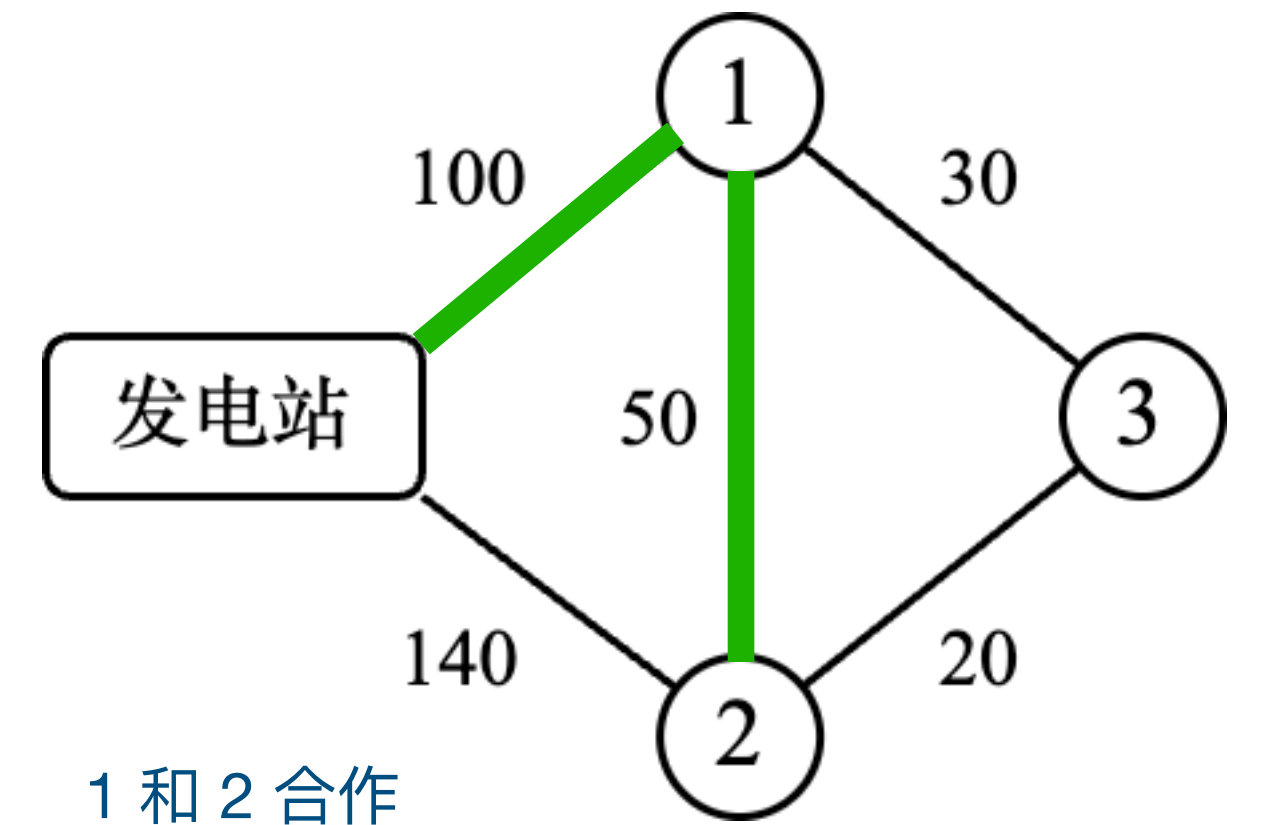
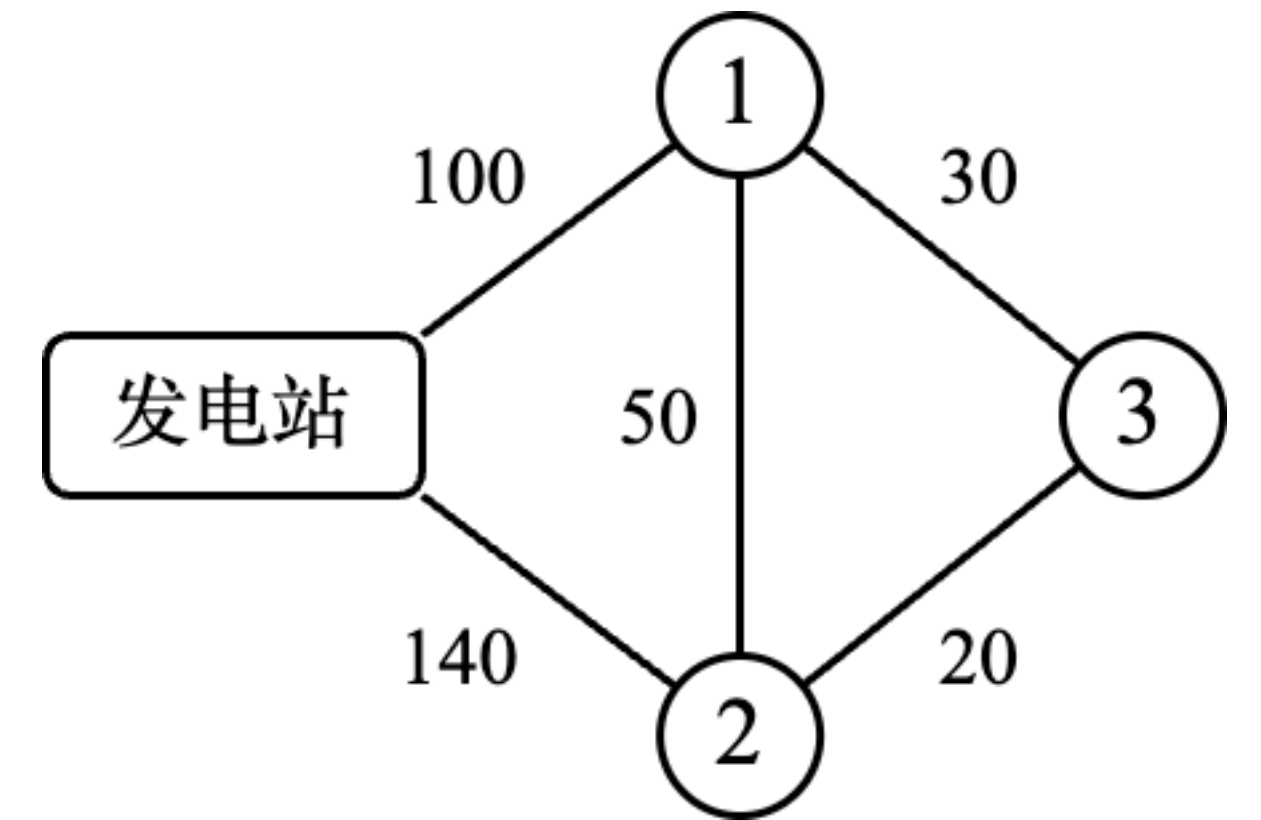
合作博弈

- 前面介绍的都是**非合作博弈 (non-cooperative game)**，适用于参与者之间存在利益冲突且无法达成合作协议的情况。
- **合作博弈 (cooperative game)** 假设参与者之间可以形成有约束力的约定，从而通过协商作出最优决策。因此，我们的关注点不再是参与者选择什么策略，而是参与者之间是否能够形成**联盟 (coalition)**，以及如何分配联盟产生的共同收益或成本。
- 由于是否加入联盟也取决于自己可以从该联盟中获得多少收益，因此合作博弈主要讨论联盟成员间的收益分配方法。
- 有时非合作博弈与合作博弈之间的区别并不是非常清晰的，很多应用问题也可以从非合作和合作两个角度进行分析。最容易区分两者的是建模方法。

合作博弈

三个城市间的合作

- 城市 1、2、3 共享一座发电站。从发电站到城市间的输电网络和距离（即输电成本）如右图所示。
- 城市间可以通过合作减少输电成本。例如城市 1 和 2 合作时的总成本是 150，而不合作时的总成本是 240。
- 合作博弈的定义包含以下要素：
 - 参与者集合： $N = \{1, 2, 3\}$
 - 联盟的价值函数： $v(S), S \subseteq N$
这里我们定义 v 为联盟成员在不合作时的总成本与合作时的总成本之差
 - (N, v) 定义了一个合作博弈

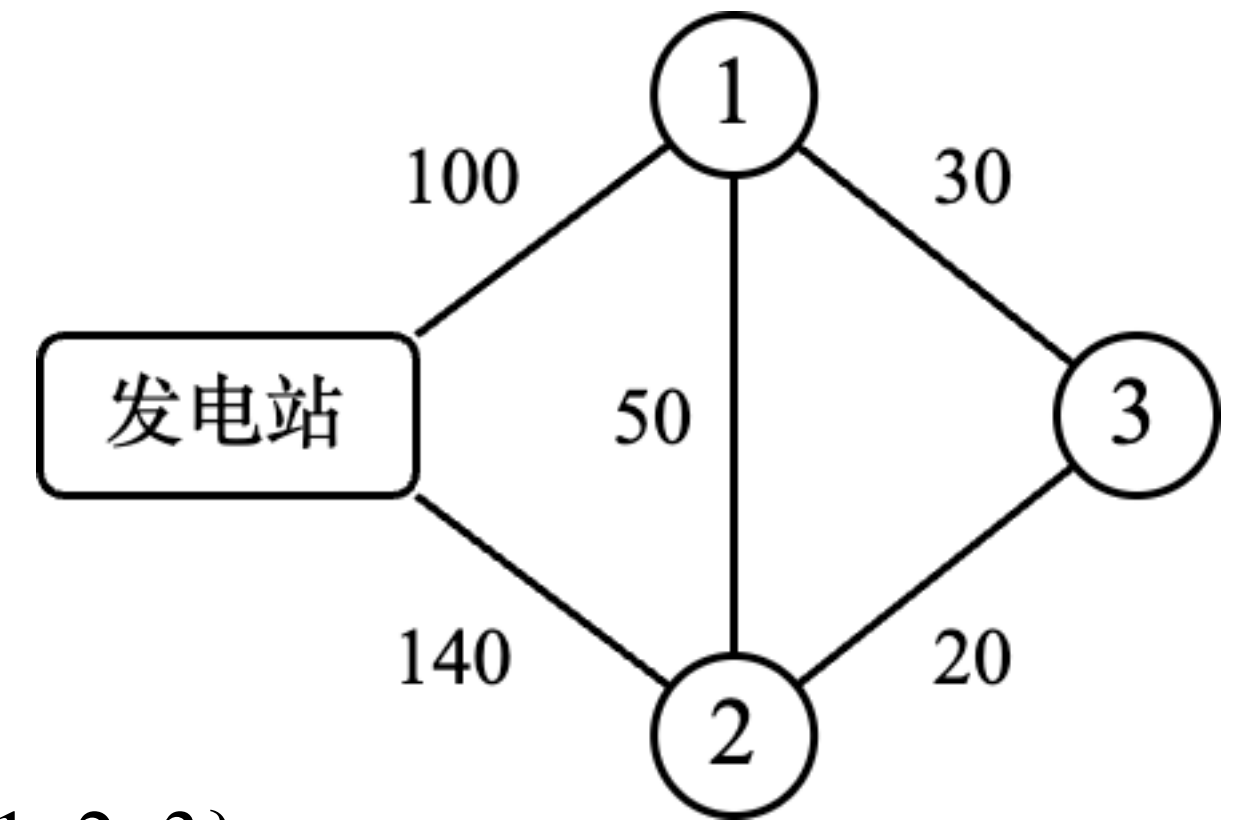


合作博弈

三个城市间的合作

- 当参与人较少时可以列出所有联盟的价值，如下表所示

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

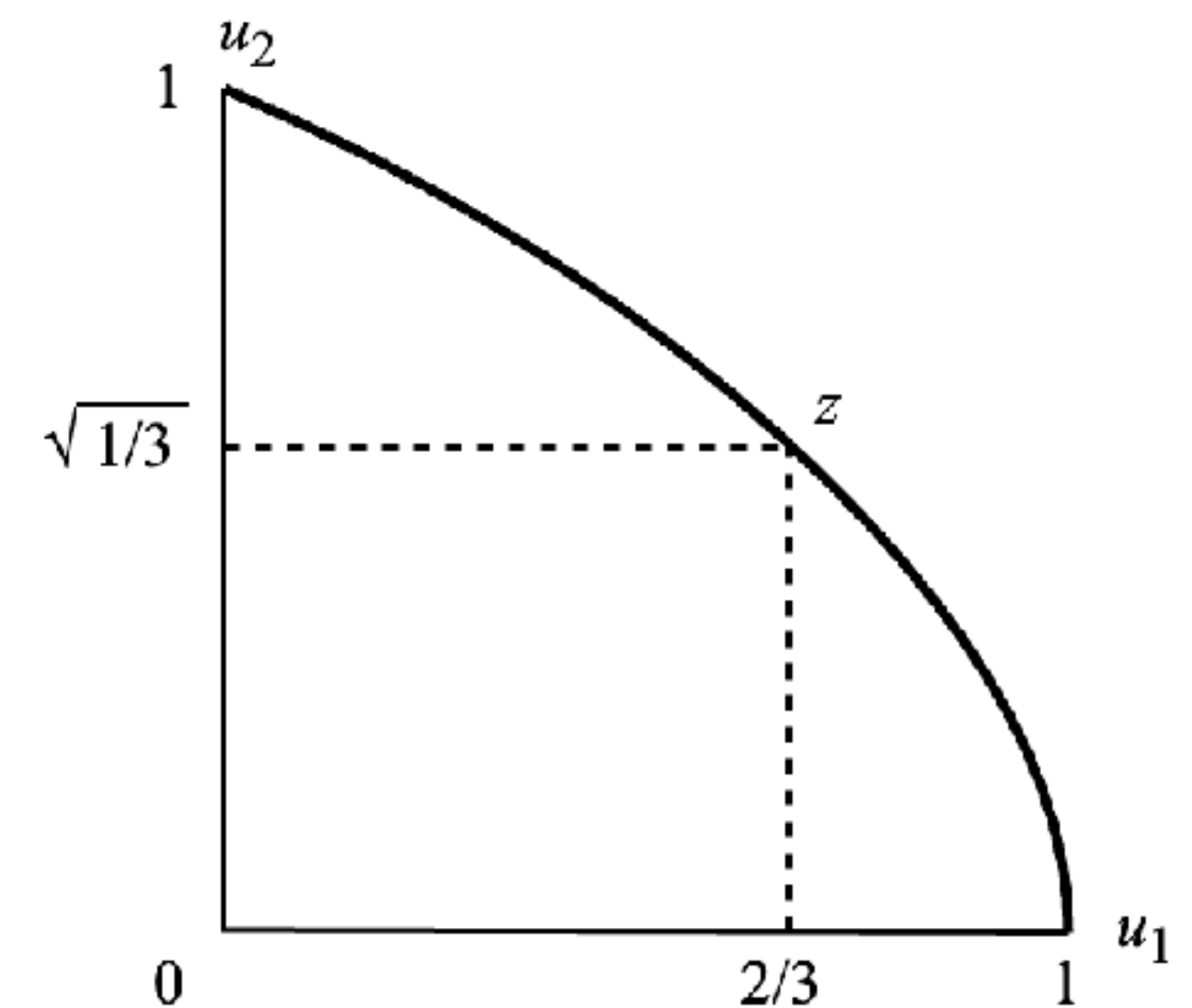


- 合作博弈的解是大联盟 (grand coalition, 即 N) 中的一种分配方案 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 该方案需满足 $x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 220$ 这一基本条件。
- 常用的解包括核 (core)、Shapley 值 (Shapley value) 和 nucleolus。核是集合解，两外两个是单值解。
- 此博弈中，Shapley 值是 $(65, 75, 80)$, nucleolus 是 $(56\frac{2}{3}, 76\frac{2}{3}, 86\frac{2}{3})$ 。
- 如何判断哪一个解更好呢？学术界通常采用公理化的方式对解进行再定义和解释。

讨价还价博弈

分蛋糕

- 蛋糕指代一单位的完美可分割物品，类似的还有酒类、仓库面积等。
- 考虑两个人分一块蛋糕的情形。可能的结果有两种：一是两人同意以 (α, β) 的比例切蛋糕；二是两人无法达成共识，因此什么也分不到。
- 我们用效用函数表示参与人对蛋糕的偏好。设参与人 1 的效用函数为 $u_1(\alpha) = \alpha$ ，参与人 2 的效用函数为 $u_2(\beta) = \sqrt{\beta}$ 。此时，分配 $(\alpha, 1 - \alpha)$ 对应的效用为 $(\alpha, \sqrt{1 - \alpha})$ 。
- 当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时可以得到有效的效用组合。这对应右图中的粗实线。两人的分配比例之和也可以小于 1，这对应粗实线和两个坐标轴之间的部分。



讨价还价博弈

分蛋糕

- 一个基于合作博弈的解是**纳什谈判解 (Nash bargaining solution)**。它是使两人效用之积最大的分配，即

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \sqrt{1 - \alpha}$$

也就是 $\alpha = 2/3$ 。

- 为什么不用效用之和的最大化分配呢？纳什的公理化分析或许可以回答这个问题。
- 我们也可以用非合作博弈的方法讨论这个问题。例如鲁宾斯坦的交替报价模型。

