

博弈论

第三讲：二人博弈

黄嘉平

深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

电子邮箱： huangjp@szu

课程主页： <https://huangjp.com/GT/>

基本定义

双矩阵博弈

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

双矩阵博弈是两个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 组成的组合 (A, B) 。

- A 为参与人 1 的收益矩阵， B 为参与人 2 的收益矩阵。
- 当参与人选择行动组合 (i, j) 时，参与人 1 的收益为 a_{ij} ，参与人 2 的收益为 b_{ij} 。

参与人 1 和 2 的混合策略集合分别为

$$\Delta^m := \left\{ \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \text{ for all } i = 1, \dots, m \right\},$$

$$\Delta^n := \left\{ \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \text{ for all } j = 1, \dots, n \right\}$$

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

策略的收益

- 纯策略的定义与二人零和博弈时相同。
- 当参与人 1 选择策略 p ，参与人 2 选择策略 q 时，二人的收益分别为

$$pAq = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j, \quad pBq = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i b_{ij} q_j$$

- 在囚徒困境博弈中，策略组合 $((0.2, 0.8), (0.3, 0.7))$ 对应的收益分别是

$$(0.2 \quad 0.8) \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = (-0.2 \quad -9.2) \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = -0.06 - 6.44 = -6.5$$

$$(0.2 \quad 0.8) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = (-8.2 \quad -7.2) \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} = -2.46 - 5.04 = -7.5$$

最佳响应

- 非合作博弈的核心概念是**最佳响应 (best reply)**。它说的是一个理性且自私自利的参与人在知道（或预测）对方策略的基础上，永远以最大化自己的（期望）收益为准则选择策略。

在 $m \times n$ 的双矩阵博弈 (A, B) 中，参与人 1 的策略 p 如果满足

$$pAq \geq p'Aq \text{ for all } p' \in \Delta^m$$

则称其为对参与人 2 的策略 q 的最佳响应。同样，参与人 2 的策略 q 如果满足

$$pBq \geq pBq' \text{ for all } q' \in \Delta^n$$

则称其为对参与人 1 的策略 p 的最佳响应。

纳什均衡

囚徒困境博弈的双矩阵：

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

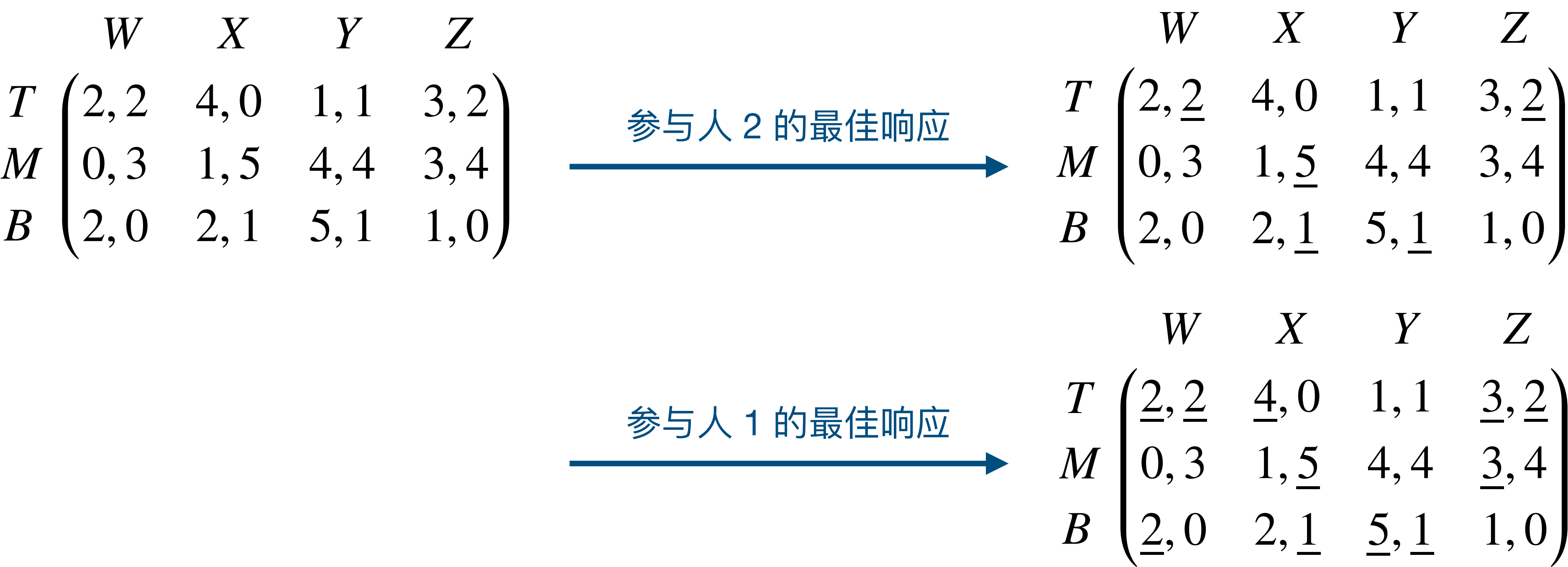
在 $m \times n$ 的双矩阵博弈 (A, B) 中，如果参与人 1 的策略 p^* 和参与人 2 的策略 q^* 互为最佳响应，则称策略组合 (p^*, q^*) 为**纳什均衡 (Nash equilibrium)**。如果 p^* 和 q^* 都是纯策略，则将该纳什均衡称为**纯策略纳什均衡**。

- 纳什均衡的概念可以应用在任意的博弈上，即对参与人数、策略集合、收益函数不做任何限制。
- **每个双矩阵博弈都存在纳什均衡**（证明见原书第十三章）。
- 纳什均衡的主要问题不是存在性，而是它往往并不是唯一的。因此我们面临着如何选择纳什均衡的问题。
- 人们在现实中是否会选择纳什均衡呢？（现实中的人们是理性的吗？）

如何计算纳什均衡

寻找纯策略纳什均衡：划线法

划线法：依次找出每个参与人的最佳响应策略，并在收益矩阵中用下划线标注



在这个例子里，纯策略纳什均衡为 $(T, W), (T, Z), (B, Y)$ 。或者用混合策略表达为 $(e^1, e^1), (e^1, e^4), (e^3, e^3)$ 。

练习：找出所有纯策略纳什均衡

囚徒困境博弈

	C	D
C	-1, -1	-10, 0
D	0, -10	-9, -9

性别战博弈

	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

一个 4 × 6 博弈

	A	B	C	D	E	F
W	2, 1	4, 3	7, 2	7, 4	0, 5	3, 2
X	4, 0	5, 4	1, 6	0, 4	0, 3	5, 1
Y	1, 3	5, 3	3, 2	4, 1	1, 0	4, 3
Z	4, 3	2, 5	4, 0	1, 0	1, 5	2, 1

练习：找出所有纯策略纳什均衡

囚徒困境博弈

	C	D
C	-1, -1	-10, <u>0</u>
D	<u>0</u> , -10	<u>-9</u> , <u>-9</u>

性别战博弈

	足球	芭蕾
足球	<u>2</u> , <u>1</u>	0, 0
芭蕾	0, 0	<u>1</u> , <u>2</u>

一个 4 × 6 博弈

	A	B	C	D	E	F
W	2, 1	4, 3	<u>7</u> , 2	<u>7</u> , 4	0, <u>5</u>	3, 2
X	<u>4</u> , 0	<u>5</u> , 4	1, <u>6</u>	0, 4	0, 3	<u>5</u> , 1
Y	1, <u>3</u>	<u>5</u> , <u>3</u>	3, 2	4, 1	<u>1</u> , 0	4, <u>3</u>
Z	<u>4</u> , 3	2, <u>5</u>	4, 0	1, 0	<u>1</u> , <u>5</u>	2, 1

用绘图法解 2×2 博弈

- 考虑下面的双矩阵博弈

$$\begin{array}{cc} & L & R \\ T & (2, 2) & (0, 1) \\ B & (1, 1) & (3, 3) \end{array}$$

- 用划线法可得纯策略纳什均衡： $(T, L), (B, R)$
- 如何找出所有纳什均衡？
 - 假设参与人 2 的策略是 $(q, 1 - q)$ ，考虑参与人 1 的最佳响应“函数”
 - 假设参与人 1 的策略是 $(p, 1 - p)$ ，考虑参与人 2 的最佳响应“函数”
 - 找到两个最佳响应“函数”的所有交点

用绘图法解 2×2 博弈

$$\begin{array}{cc} & L & R \\ T & (2, 2) & (0, 1) \\ B & (1, 1) & (3, 3) \end{array}$$

首先考虑参与人 1:

假设参与人 2 的策略是 $(q, 1 - q)$ 。此时, 参与人 1 的策略 T 和策略 B 的收益分别是

$$2q + 0(1 - q) = 2q \quad \text{和} \quad 1q + 3(1 - q) = 3 - 2q$$

因此, 当 $2q > 3 - 2q \Leftrightarrow q > 3/4$ 时, 策略 T 是最佳响应。当 $q < 3/4$ 时, 策略 B 是最佳响应。当 $q = 3/4$ 时, 所有混合策略 $(p, 1 - p)$ 都是最佳响应。

我们可以将参与人 1 对 $(q, 1 - q)$ 的最佳响应写成 $(q, 1 - q)$ 的“函数”

$$\beta_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{if } \frac{3}{4} < q \leq 1 \\ \{(p, 1 - p) \mid 0 \leq p \leq 1\} & \text{if } q = \frac{3}{4} \\ \{(0, 1)\} & \text{if } 0 \leq q < \frac{3}{4} \end{cases}$$

注意: β_1 并不是严格意义上的函数, 因为它的取值是集合。这种映射在英文中称为 correspondence, 翻译为对应, 也可称为 set-valued function (集合值函数)。

用绘图法解 2×2 博弈

$$\begin{array}{cc} & L & R \\ T & (2, 2) & (0, 1) \\ B & (1, 1) & (3, 3) \end{array}$$

接下来考虑参与人 2:

假设参与人 1 的策略是 $(p, 1 - p)$ 。此时, 参与人 2 的策略 L 和策略 R 的收益分别是

$$2p + 1(1 - p) = 1 + p \quad \text{和} \quad 1p + 3(1 - p) = 3 - 2p$$

因此, 当 $1 + p > 3 - 2p \Leftrightarrow p > 2/3$ 时, 策略 L 是最佳响应。当 $p < 2/3$ 时, 策略 R 是最佳响应。当 $p = 2/3$ 时, 所有混合策略 $(q, 1 - q)$ 都是最佳响应。

参与人 2 对 $(p, 1 - p)$ 的最佳响应“函数”为

$$\beta_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{if } \frac{2}{3} < p \leq 1 \\ \{(q, 1 - q) \mid 0 \leq q \leq 1\} & \text{if } p = \frac{2}{3} \\ \{(0, 1)\} & \text{if } 0 \leq p < \frac{2}{3} \end{cases}$$

用绘图法解 2×2 博弈

	L	R
T	$(2, 2)$	$(0, 1)$
B	$(1, 1)$	$(3, 3)$

纳什均衡 (p^*, q^*) 应满足二者互为最佳响应，即

$$p^* \in \beta_1(q^*) \quad \text{和} \quad q^* \in \beta_2(p^*)$$

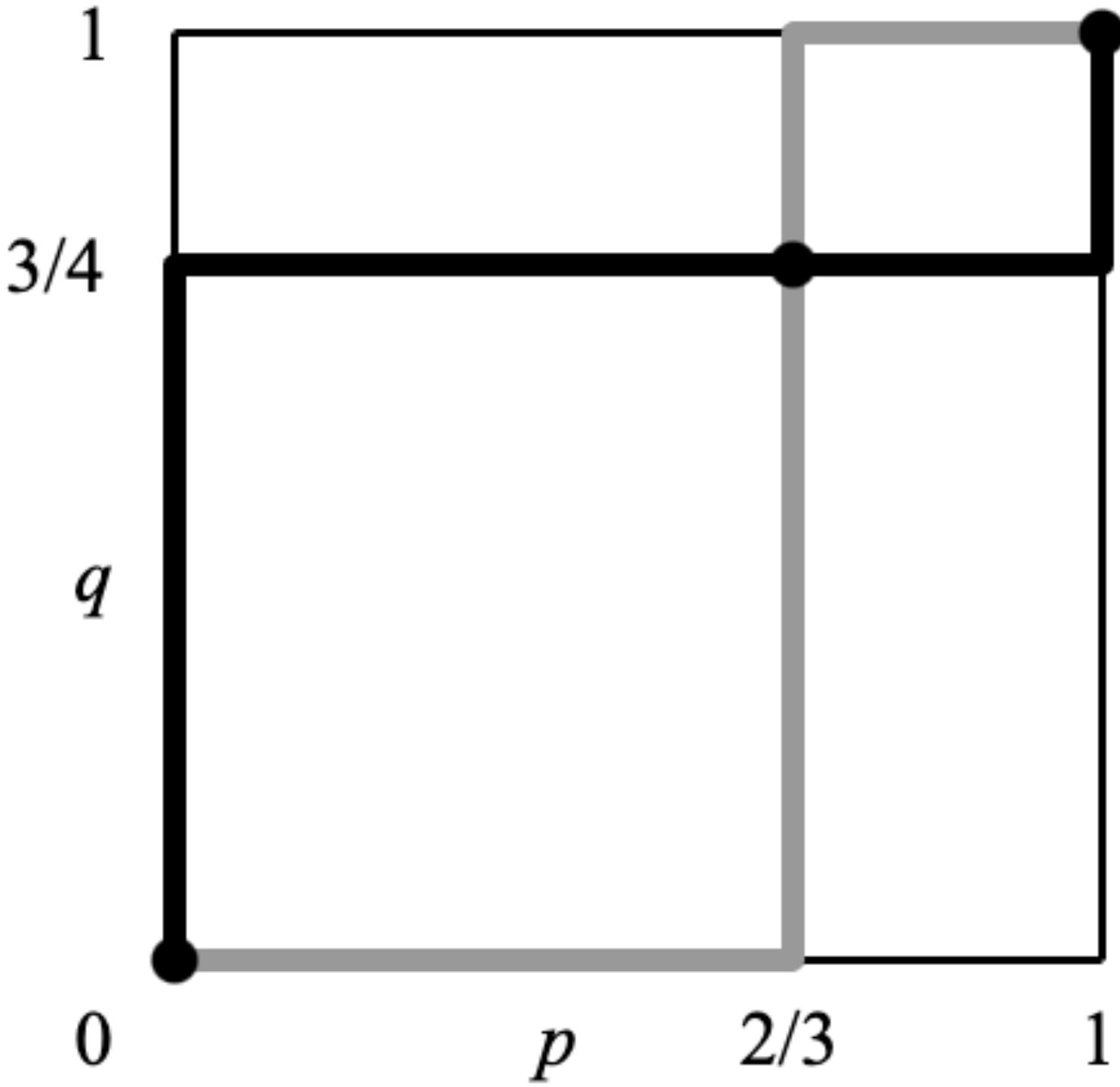
如果将两个最佳响应函数画在同一幅图中， (p^*, q^*) 应为两个函数的交点。

如右图所示，这个博弈共有三个纳什均衡，分别是

$$((1,0), (1,0))$$

$$((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}))$$

$$((0,1), (0,1))$$



利用剔除严格劣势策略简化问题

反复剔除严格劣势策略可以给博弈降维。被剔除的策略在纳什均衡中被采用的概率为零，剔除后得到的博弈中也不会出现原博弈中不存在的纳什均衡。

考虑下面的双矩阵博弈：

	<i>W</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
<i>T</i>	2, 2	2, 1	2, 2	0, 0
<i>M</i>	1, 0	4, 1	2, 4	1, 5
<i>B</i>	0, 4	3, 1	3, 0	3, 3

我们可以确认 (T, W) 是唯一的纯策略纳什均衡。

参与人 1 的三个纯策略 T, M, B 都不严格劣于任意一个纯策略。参与人 2 的纯策略 W, X, Y, Z 亦然。这说明我们需要考虑严格劣于某个混合策略的可能性。

利用剔除严格劣势策略简化问题

	W	X	Y	Z
T	$(2, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(0, 0)$
M	$(1, 0)$	$(4, 1)$	$(2, 4)$	$(1, 5)$
B	$(0, 4)$	$(3, 1)$	$(3, 0)$	$(3, 3)$

让我们考虑参与人 2 的纯策略 X 。

通过观察可知 X 的收益低于 W 和 Y 的收益的最大值，即

$$1 < \max\{2,2\}, \quad 1 < \max\{0,4\}, \quad 1 < \max\{4,0\}$$

这里可以考虑 W 和 Y 的凸组合策略，即 $(q,0,1 - q,0)$ 。 X 严格劣于这个策略的条件是

$$\begin{aligned} 1 &< 2q + 2(1 - q) = 2 \\ 1 &< 0q + 4(1 - q) = 4 - 4q \\ 1 &< 4q + 0(1 - q) = 4q \end{aligned}$$

这三个不等式的解是 $\frac{1}{4} < q < \frac{3}{4}$ 。因此 X 是严格劣势策略（例如它严格劣于 $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$ ），可以将其剔除。

利用剔除严格劣势策略简化问题

	W	X	Y	Z
T	2, 2	2, 1	2, 2	0, 0
M	1, 0	4, 1	2, 4	1, 5
B	0, 4	3, 1	3, 0	3, 3

①

↓

这样我们就得到了一个缩小了的 3×3 博弈。

接下来可以考虑参与人 1 的纯策略 M 。

不难发现， M 的收益低于 T 和 B 的收益的最大值，即

$$1 < \max\{2,0\}, \quad 2 < \max\{2,3\}, \quad 1 < \max\{0,3\}$$

	W	Y	Z
T	2, 2	2, 2	0, 0
M	1, 0	2, 4	1, 5
B	0, 4	3, 0	3, 3

考虑混合策略 $(p,0,1 - p)$ 。 M 严格劣于这个策略的条件是

$$\begin{aligned} 1 &< 2p + 0(1 - p) = 2p \\ 2 &< 2p + 3(1 - p) = 3 - p \\ 1 &< 0p + 3(1 - p) = 3 - 3p \end{aligned}$$

这三个不等式的解为 $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$ 。因此 M 是严格劣势策略（例如它严格劣于 $(\frac{3}{5},0,\frac{2}{5})$ ），可以将其剔除。

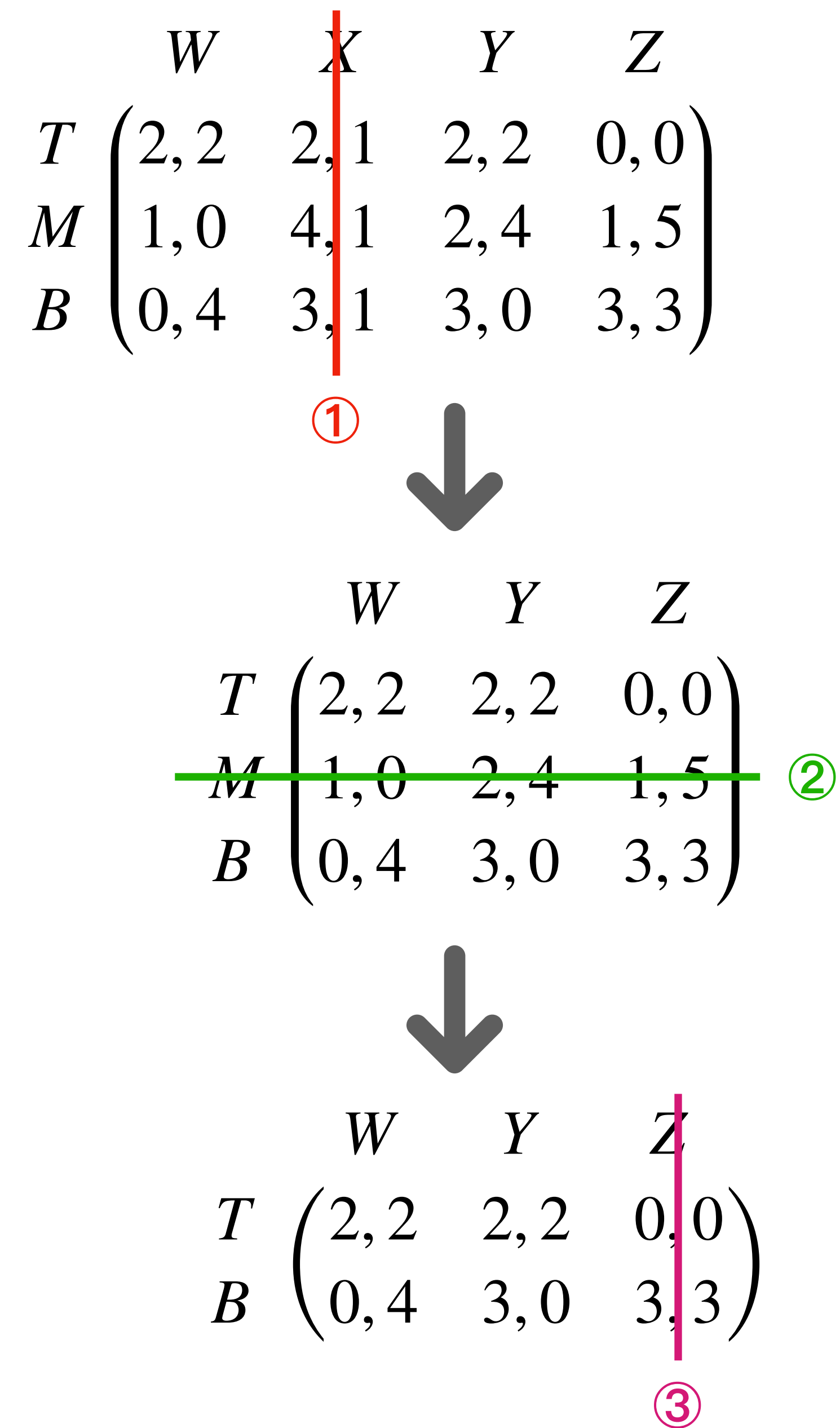
利用剔除严格劣势策略简化问题

这样我们就得到了一个更小的 2×3 博弈。

这时，参与人 2 的纯策略 Z 严格劣于纯策略 W ，因此可以直接将其剔除。剔除后可以获得 2×2 博弈

$$\begin{array}{cc} & W & Y \\ T & (2, 2) & (2, 2) \\ B & (0, 4) & (3, 0) \end{array}$$

最终获得的博弈中存在纯策略纳什均衡 (T, W) 。如果要找出所有纳什均衡，则需要用绘图法。



利用剔除严格劣势策略简化问题

	W	X	Y	Z
T	2, 2	2, 1	2, 2	0, 0
M	1, 0	4, 1	2, 4	1, 5
B	0, 4	3, 1	3, 0	3, 3

在最终获得的 2×2 博弈中，首先考虑参与人 1 的最佳响应：

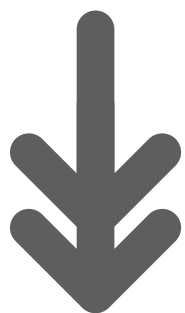
假设参与人 2 的策略是 $(q, 1 - q)$ 。此时，参与人 1 的策略 T 和策略 B 的收益分别是

$$2q + 2(1 - q) = 2 \quad \text{和} \quad 0q + 3(1 - q) = 3 - 3q$$

因此，当 $2 > 3 - 3q \Leftrightarrow q > 1/3$ 时，策略 T 是最佳响应。当 $q < 1/3$ 时，策略 B 是最佳响应。当 $q = 1/3$ 时，所有混合策略 $(p, 1 - p)$ 都是最佳响应。

参与人 1 对 $(q, 1 - q)$ 的最佳响应函数为

$$\beta_1(q, 1 - q) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{if } \frac{1}{3} < q \leq 1 \\ \{(p, 1 - p) \mid 0 \leq p \leq 1\} & \text{if } q = \frac{1}{3} \\ \{(0, 1)\} & \text{if } 0 \leq q < \frac{1}{3} \end{cases}$$



	W	Y
T	2, 2	2, 2
B	0, 4	3, 0

利用剔除严格劣势策略简化问题

	W	X	Y	Z
T	2, 2	2, 1	2, 2	0, 0
M	1, 0	4, 1	2, 4	1, 5
B	0, 4	3, 1	3, 0	3, 3

接下来考虑参与人 2 的最佳响应：

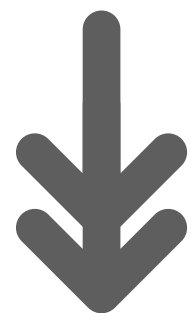
假设参与人 1 的策略是 $(p, 1 - p)$ 。此时，参与人 2 的策略 W 和策略 R 的收益分别是

$$2p + 4(1 - p) = 4 - 2p \quad \text{和} \quad 2p + 0(1 - p) = 2p$$

因此，当 $4 - 2p > 2p \Leftrightarrow p < 1$ 时，策略 W 是最佳响应。
 当 $p = 1$ 时，所有混合策略 $(q, 1 - q)$ 都是最佳响应。

参与人 2 对 $(p, 1 - p)$ 的最佳响应函数为

$$\beta_2(p, 1 - p) = \begin{cases} \{(1, 0)\} & \text{if } 0 \leq p < 1 \\ \{(q, 1 - q) \mid 0 \leq q \leq 1\} & \text{if } p = 1 \end{cases}$$



	W	Y
T	2, 2	2, 2
B	0, 4	3, 0

利用剔除严格劣势策略简化问题

双方的最佳响应函数分别为

$$\beta_1(q,1-q)=\begin{cases} \{(1,0)\} & \text{if } \frac{1}{3}<q\leq 1 \\ \{(p,1-p) \mid 0\leq p\leq 1\} & \text{if } q=\frac{1}{3} \\ \{(0,1)\} & \text{if } 0\leq q<\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\beta_2(p,1-p)=\begin{cases} \{(1,0)\} & \text{if } 0\leq p<1 \\ \{(q,1-q) \mid 0\leq q\leq 1\} & \text{if } p=1 \end{cases}$$

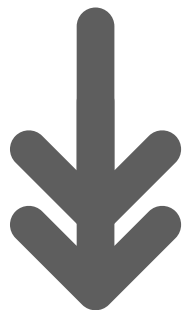
如右图所示，最佳响应函数的交点（重叠部分）为

$$\left\{ \left((1,0), (q,1-q) \right) \mid \frac{1}{3}\leq q\leq 1 \right\}$$

对应原博弈的纳什均衡是

$$\left\{ \left((1,0,0), (q,0,1-q,0) \right) \mid \frac{1}{3}\leq q\leq 1 \right\}$$

	W	X	Y	Z
T	(2, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(0, 0)
M	(1, 0)	(4, 1)	(2, 4)	(1, 5)
B	(0, 4)	(3, 1)	(3, 0)	(3, 3)



	W	Y
T	(2, 2)	(2, 2)
B	(0, 4)	(3, 0)

