

博弈论

第四讲：扩展式博弈（一）

黄嘉平

深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

电子邮箱： huangjp@szu

课程主页： <https://huangjp.com/GT/>

何时进行行动是模型的重要设定

- 同时行动的例子：石头剪子布
- 序贯行动的例子：棋牌类游戏（如围棋、麻将、德州扑克等）
- 取火柴游戏（take-away game 的一个例子）
 - 桌上有 21 根火柴
 - 两个参与人轮流拿走一部分火柴，但每次只能拿走 1, 2 或 3 根
 - 参与人 1 首先开始
 - 拿走最后一根火柴的参与人获胜
- 我们用扩展式博弈表达序贯行动模型

扩展式博弈

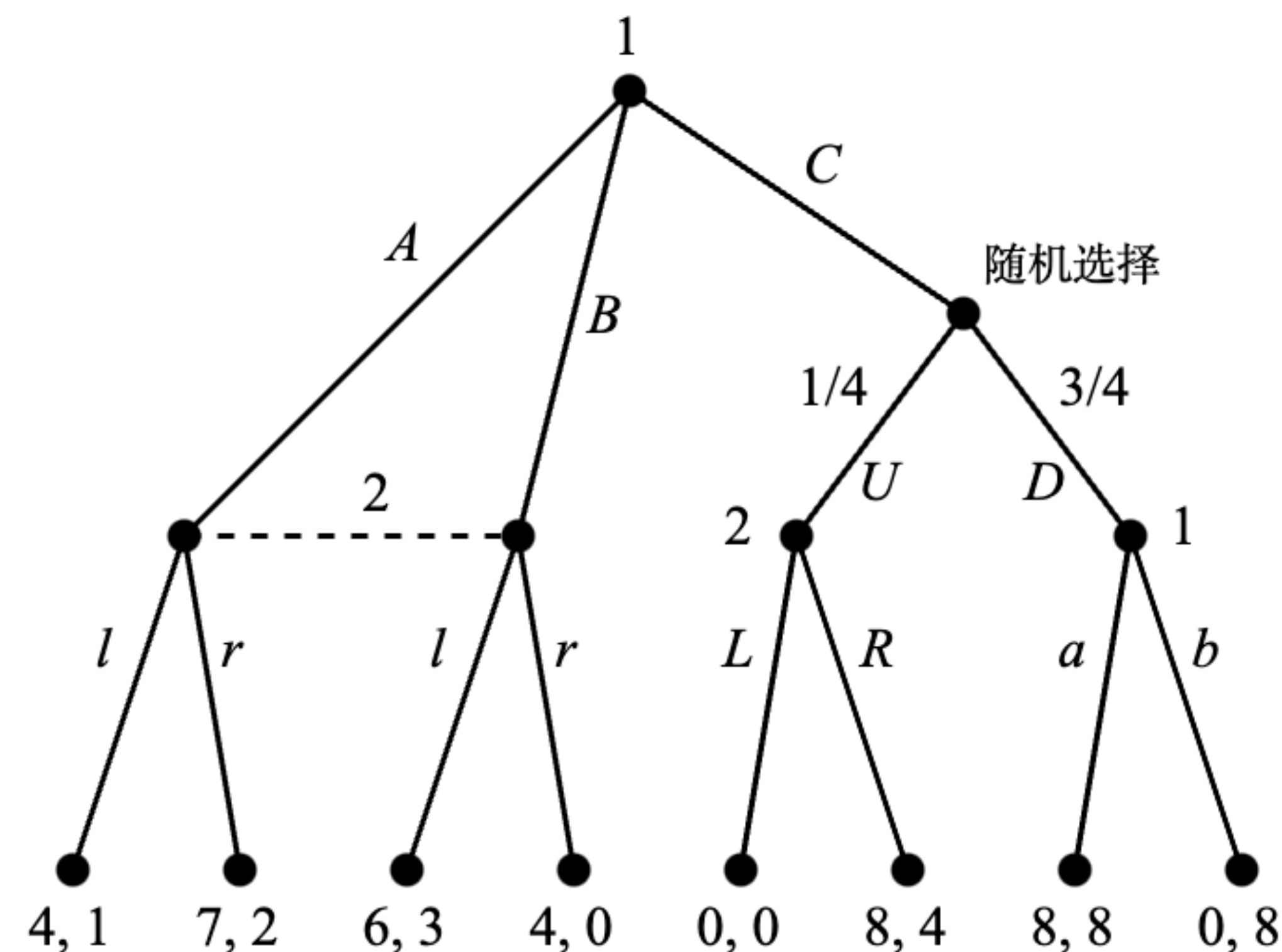
Extensive form game

扩展式博弈的正式数学表达很复杂（参考原书第十四章），且在入门阶段弊大于利。这里我们利用常见的博弈树进行定义。

- **博弈树（game tree）**：由节点（node）和边（edge）组成的树形图。
 - 节点可以代表参与人的决策点（decision node）、随机选择的决策点（chance node）、或者博弈的终点（end node）
 - 最顶端的节点称为根（root），是整个博弈的起点
 - 除了终点以外，所有的节点都是决策节点
 - 每个终点对应一个从起点开始的行动组合，且每个行动组合都对应一个终点
- 通过在博弈树上进行标注，可以表达参与人集合、参与人的行动顺序、每个行动组合对应的收益，以及参与人获得信息的能力等。

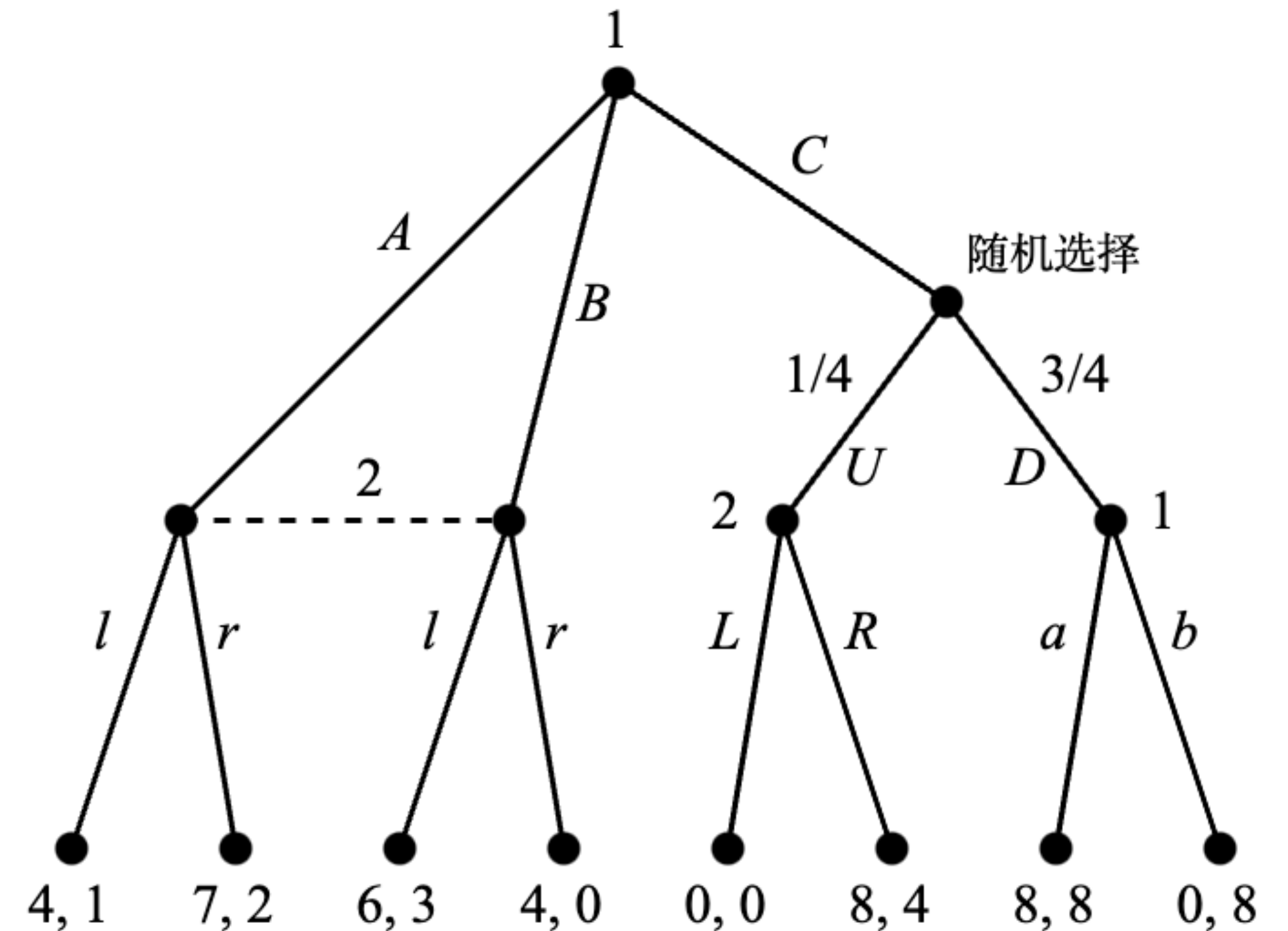
一个扩展式博弈

- 参与人集合是 $\{1, 2\}$ 。
- 根节点是参与人 1 的决策节点，他在 A, B, C 三个备选行动中进行选择。
- 第二个进行决策的是参与人 2。她能知道参与人 1 或者选择了 A 或 B 其中之一，或者选择了 C 。
- 参与人 2 无法区分 A 和 B 。这在博弈树中通过用虚线连接两个决策节点的方式表达。我们可以将所有被虚线连接起来的决策节点理解为一个节点，它们共享同一个备选行动集。当参与人 1 选择 A 或 B 时，参与人 2 需要从 ℓ 和 r 中进行选择。



一个扩展式博弈

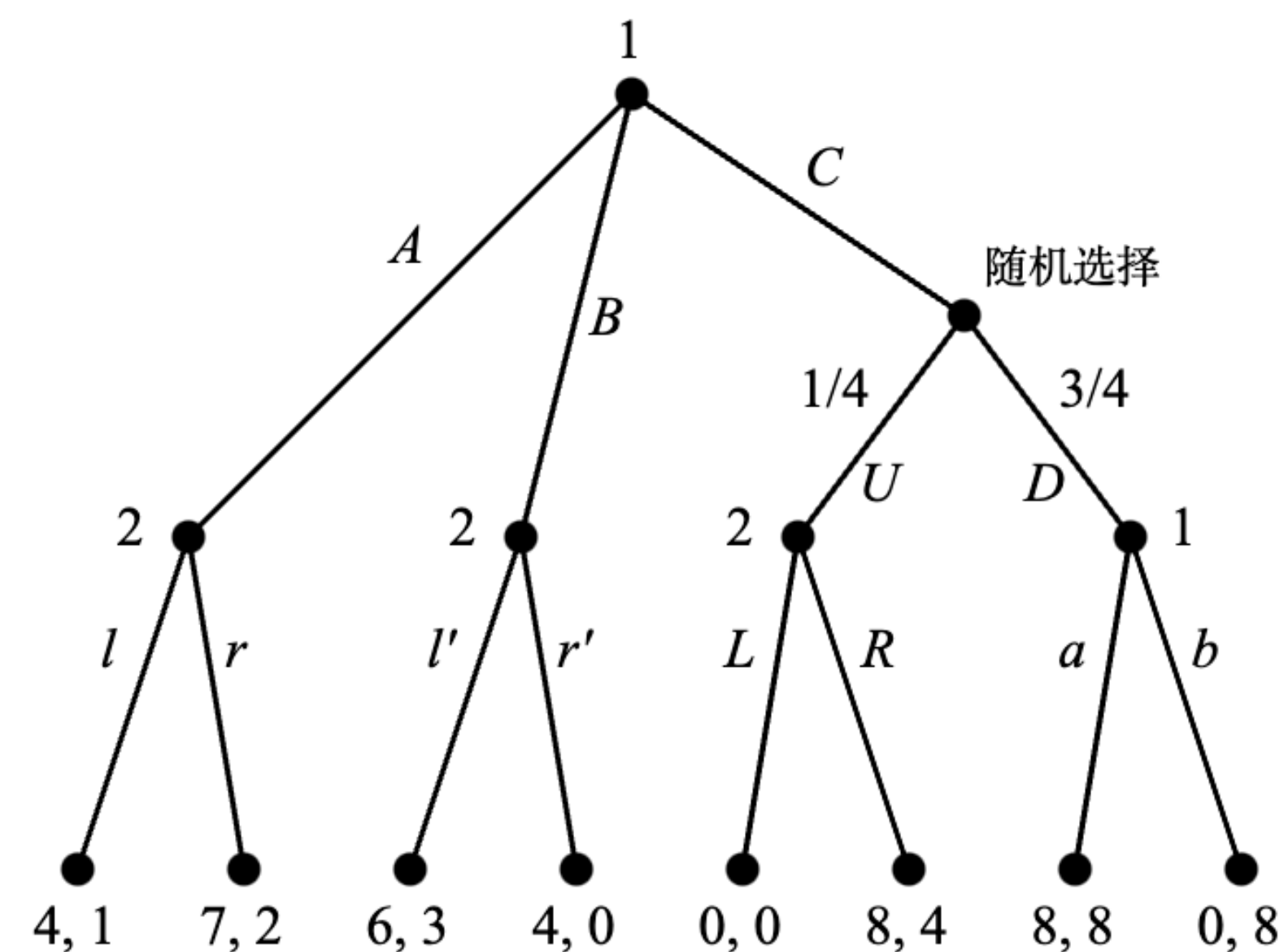
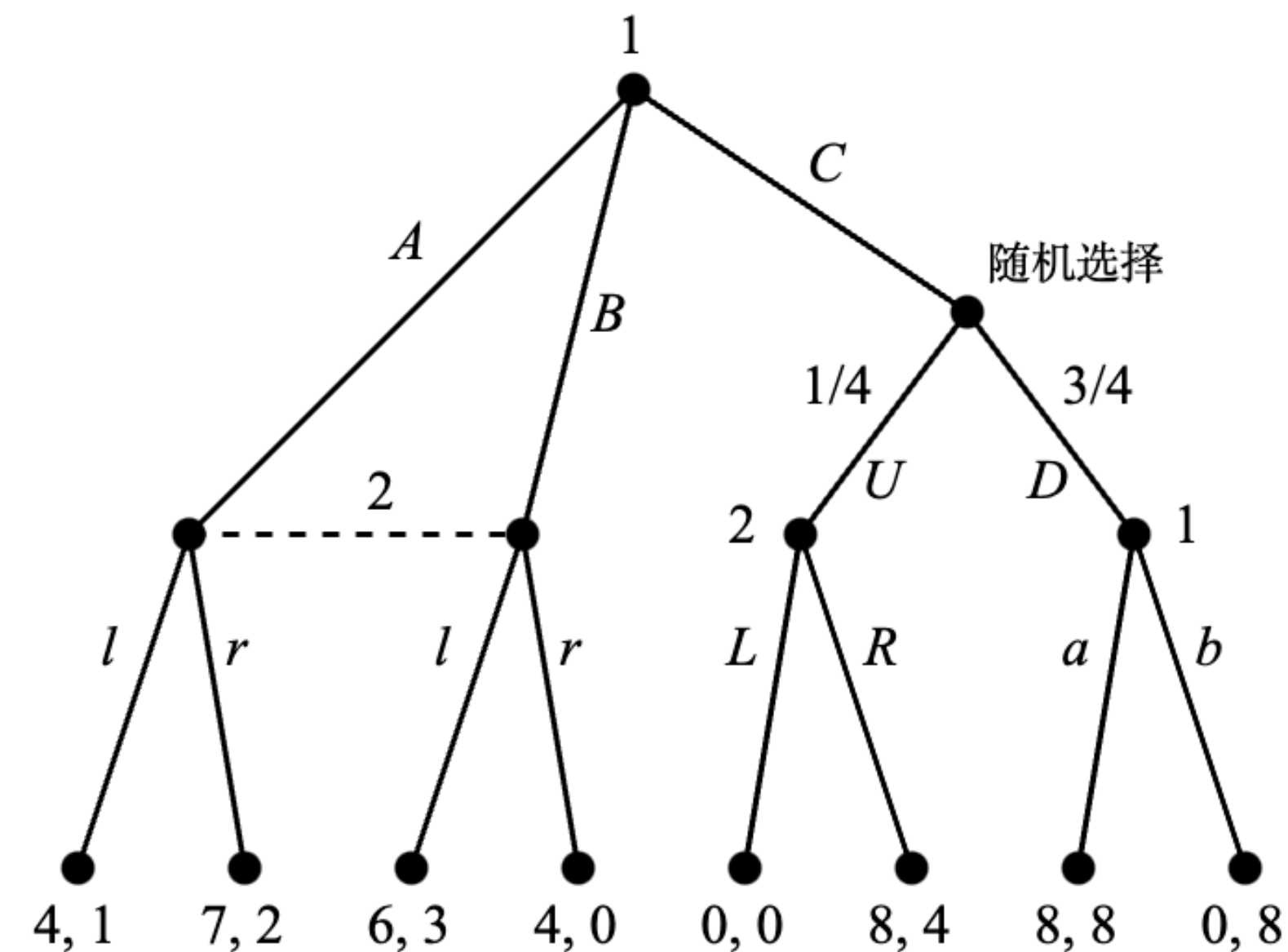
- 当参与人 1 选择 C 时，紧随其后的是一个随机选择节点。根据图中的标注可知，此时有 $1/4$ 的概率由参与人 2 继续进行决策，有 $3/4$ 的概率由参与人 1 再次进行决策。
- 如果由参与人 2 决策，她的备选行动集是 $\{L, R\}$ 。
- 如果由参与人 1 决策，他的备选行动集是 $\{a, b\}$ 。
- 这个博弈共有 8 个终点，各自对应一个行动组合和它的收益向量。例如左侧第三个终点对应参与人 1 选择 B 后参与人 2 选择 ℓ ，二人的收益分别是 6 和 3。



关于信息集

信息集 (information set) 是决策节点的集合，它具有以下性质：

- 信息集是针对参与人定义的，不同参与人的决策节点不会出现在同一个信息集中。
- 单个决策节点也是信息集的一种，称为平凡的 (trivial) 信息集。包含两个以上节点的信息集称为非平凡的 (nontrivial) 。
- 包含非平凡信息集的博弈称为**不完美信息博弈 (games with imperfect information)**，反之，仅包含平凡信息集的博弈称为完美信息博弈 (games with perfect information) 。
- 右侧的两个博弈是不一样的。

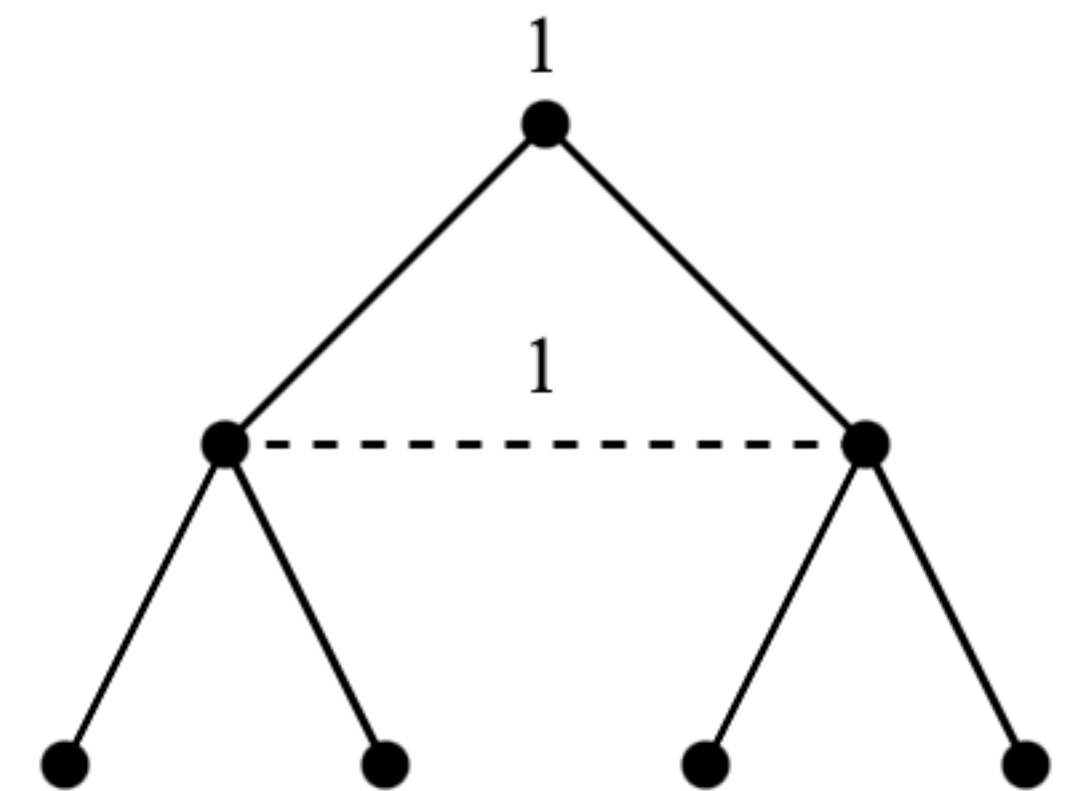


完美记忆*

在扩展式博弈中，如果所有参与人都能记住自己曾经作出的决策，我们就称这类博弈具备**完美记忆（perfect recall）**。

在右图的博弈树中，参与人 1 需要连续进行两侧决策。在第二次决策时，他无法区分自己第一次决策的结果，也就是说他忘记了自己曾经作出的决策。因此这个博弈不具备完美记忆。

是否具备完美记忆在区分混合策略和**行为策略（behavioral strategy）**时十分重要，但是对于本门课程来说超纲了。我们只讨论具备完美记忆的博弈，同时也不涉及行为策略。感兴趣的同学可以学习原书第十四章。



扩展式博弈可以变形为策略式博弈

行动与策略

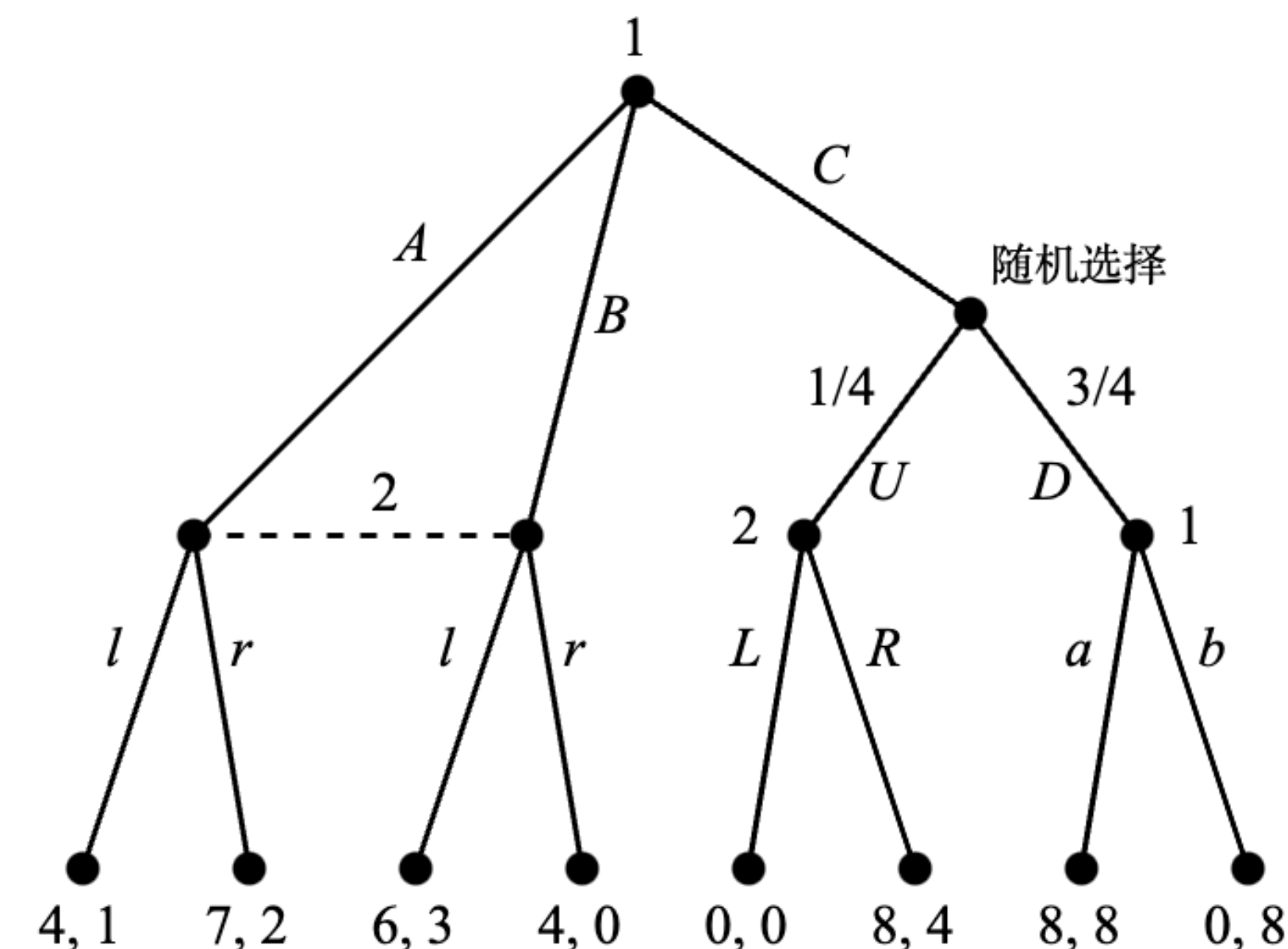
在矩阵博弈和双矩阵博弈中，参与人的行动和策略的含义相同。但是在扩展式博弈中，我们需要明确区分行动和策略。

行动 (action) 是参与人在自己每个信息集上可以选择的备选项。

- 在右图中，参与人 1 的行动包括 A, B, C, a, b ，参与人 2 的行动包括 ℓ, r, L, R 。

策略 (strategy) 是参与人在博弈中的完整的行动计划，也就是他在自己的每个信息集上所选选择的行动的列表。

- 在右图中，参与人 1 的策略可以是
 - 首先选择 C ；如果随机选择的结果是 D 则选择 b ；或
 - 首先选择 A ；如果随机选择的结果是 D 则选择 b ；等等。



第二个策略看上去比较奇怪，因为一旦选择了 A 就不回发生后续的随机选择，也就没有机会选择 a 或 b 。在现实中我们可以不考虑这个策略的后一半。

扩展式博弈的策略

我们可以写出每个参与人的策略集合。

在上下两个博弈中参与人 1 都有两个信息集，因此他的每个策略中都包含两个行动。他的策略集合为

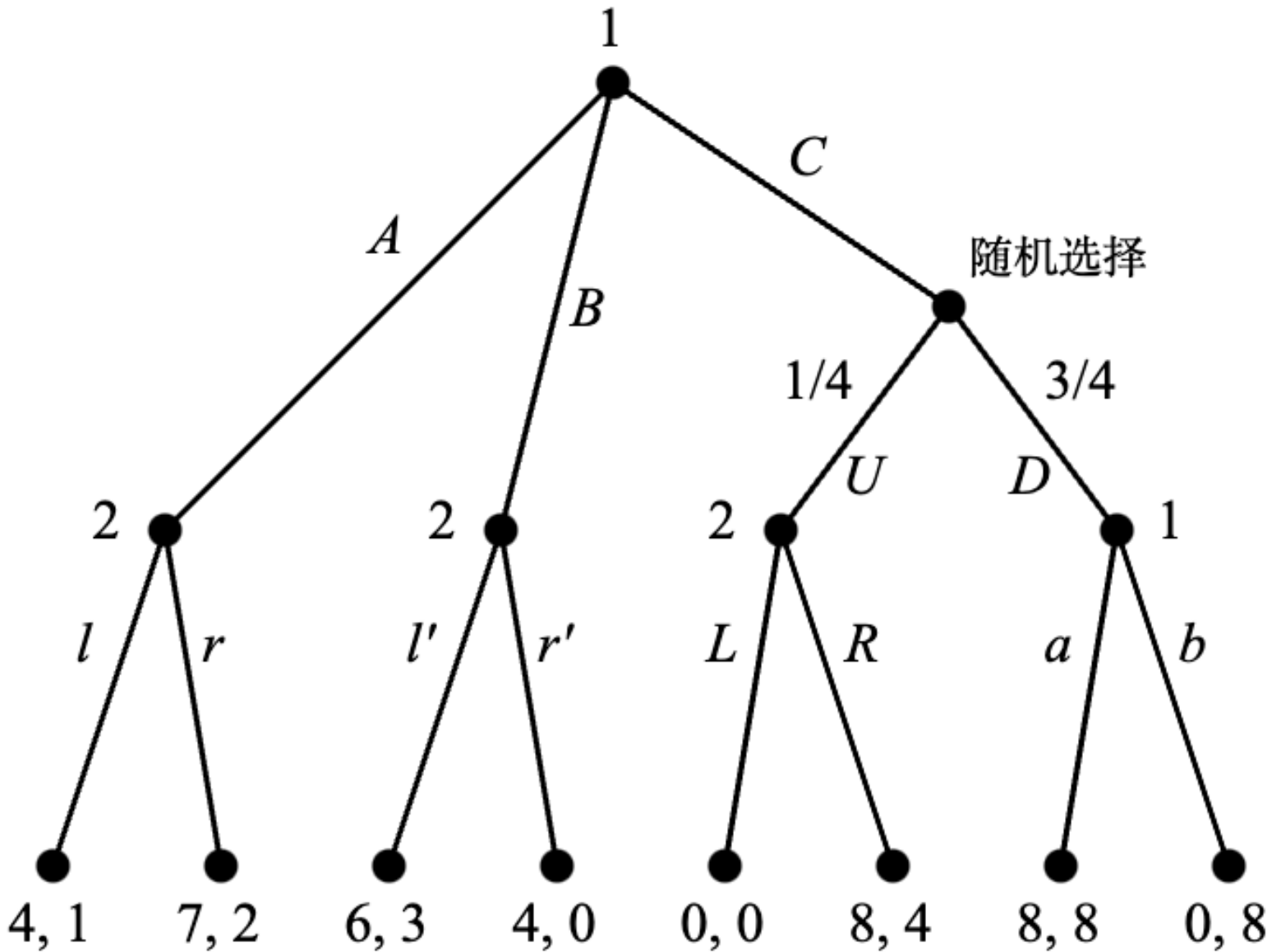
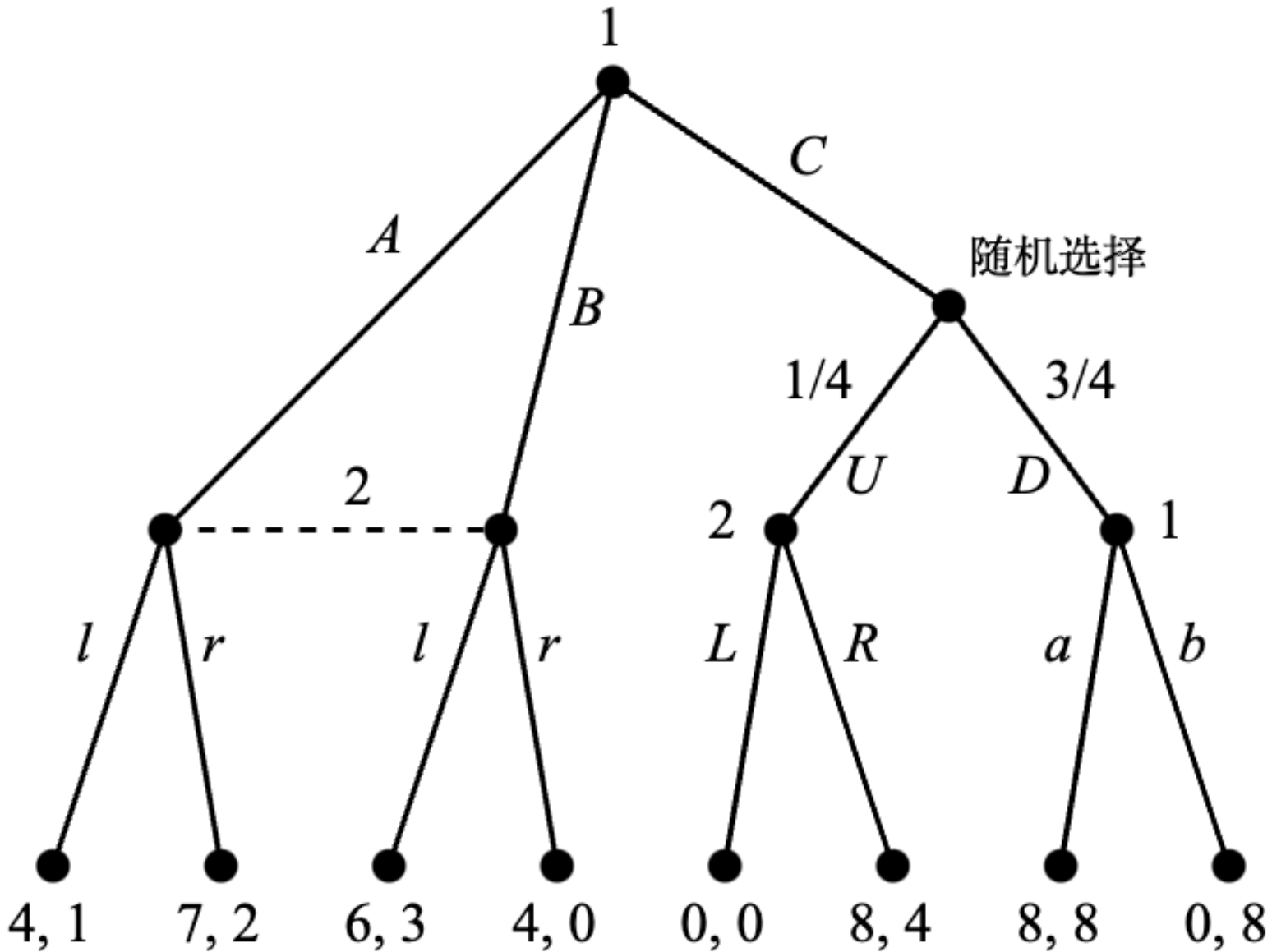
$$\{Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb\}$$

在上面的博弈中，参与人 2 也有两个信息集，她的策略集合为

$$\{\ell L, \ell R, rL, rR\}$$

在下面的博弈中，参与人 2 有三个信息集，她的策略集合为

$$\{\ell \ell' L, \ell \ell' R, \ell r' L, \ell r' R, r \ell' L, r \ell' R, rr' L, rr' R\}$$



博弈的结果和收益

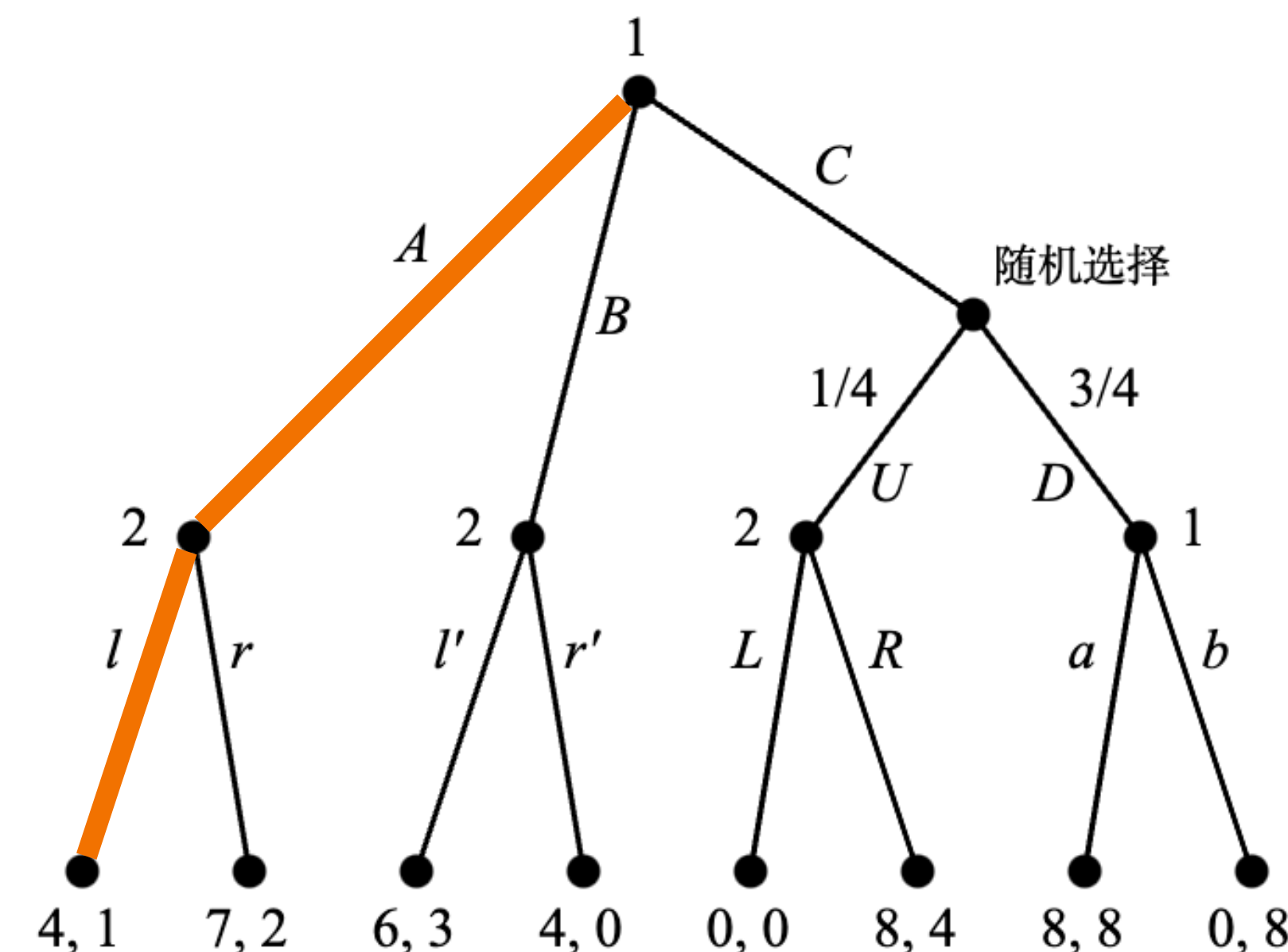
在矩阵博弈和双矩阵博弈中，策略的组合（也就是行动的组合）就是博弈的结果（**outcome**），每个结果对应一组收益。

在扩展式博弈中，结果是由策略组合产生的行动记录。

例如在右侧的博弈中，策略组合 $(Aa, \ell \ell' L)$ 对应参与人 1 首先选择 A ，然后参与人 2 选择 ℓ ，此时的结果即为 (A, ℓ) ，对应的收益向量为 $(4, 1)$ 。

由此可见，当确定一组策略时，我们可以确定博弈树上由起点到终点的一条**路径（path）**并确定收益。如果我们忽略博弈树的图形和所有路径，只记录每一组策略和它们对应的收益或期望收益，就可以获得这个扩展式博弈所对应的**策略式博弈（game in strategic form）**。

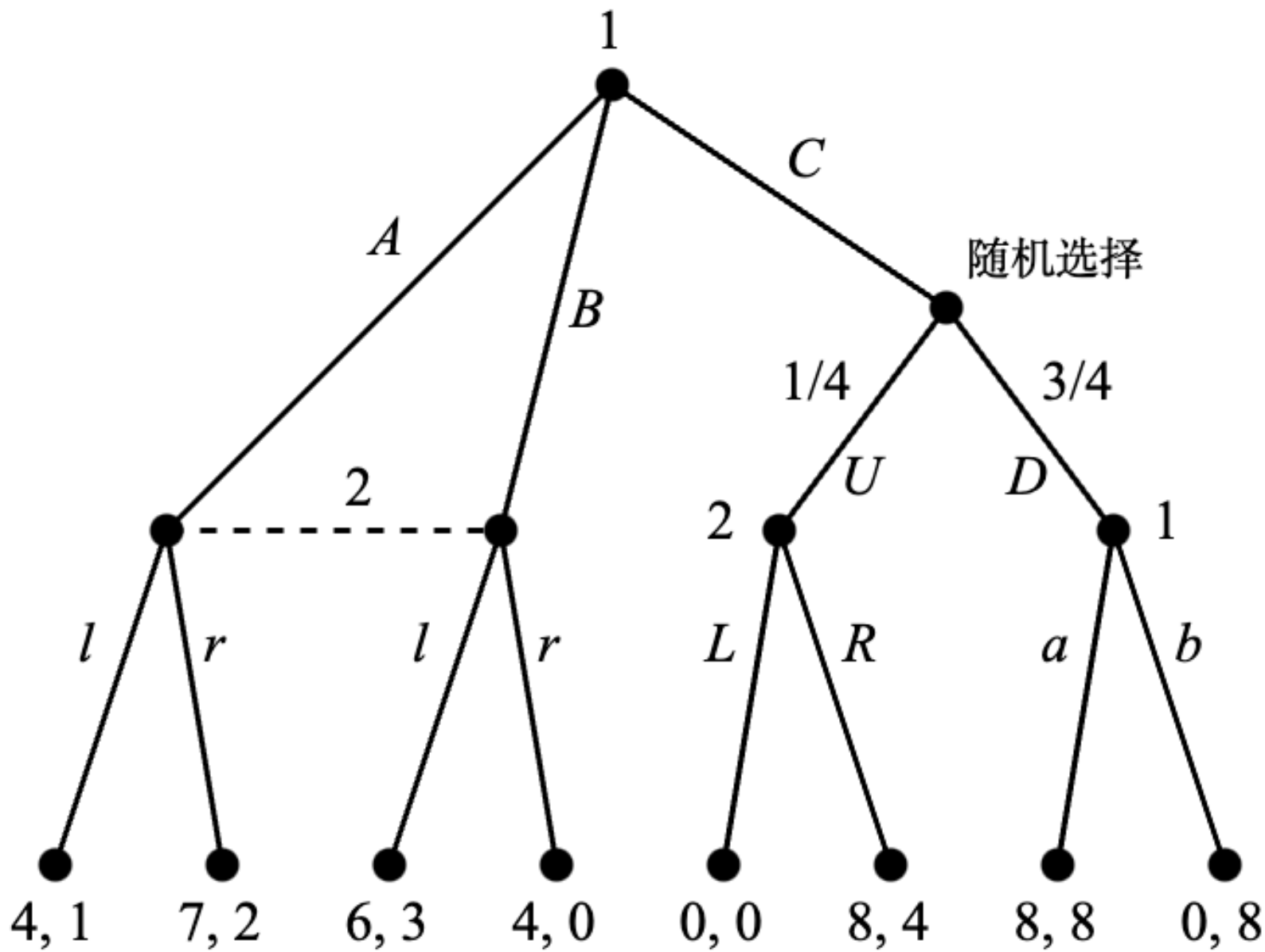
如果只有两个参与人，我们可以将策略式博弈写成双矩阵形式。



策略式博弈

- 参与人 1 的策略集合是
 $\{Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb\}$
- 参与人 2 的策略集合是
 $\{\ell L, \ell R, rL, rR\}$
- 策略式博弈可以写成 6×4 的双矩阵。
- 由于存在随机选择，我们需要计算期望收益。例如 (Cb, rL) 对应的期望收益向量是

$$\frac{1}{4}(0,0)+\frac{3}{4}(0,8) = (0,6)$$



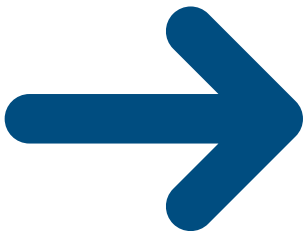
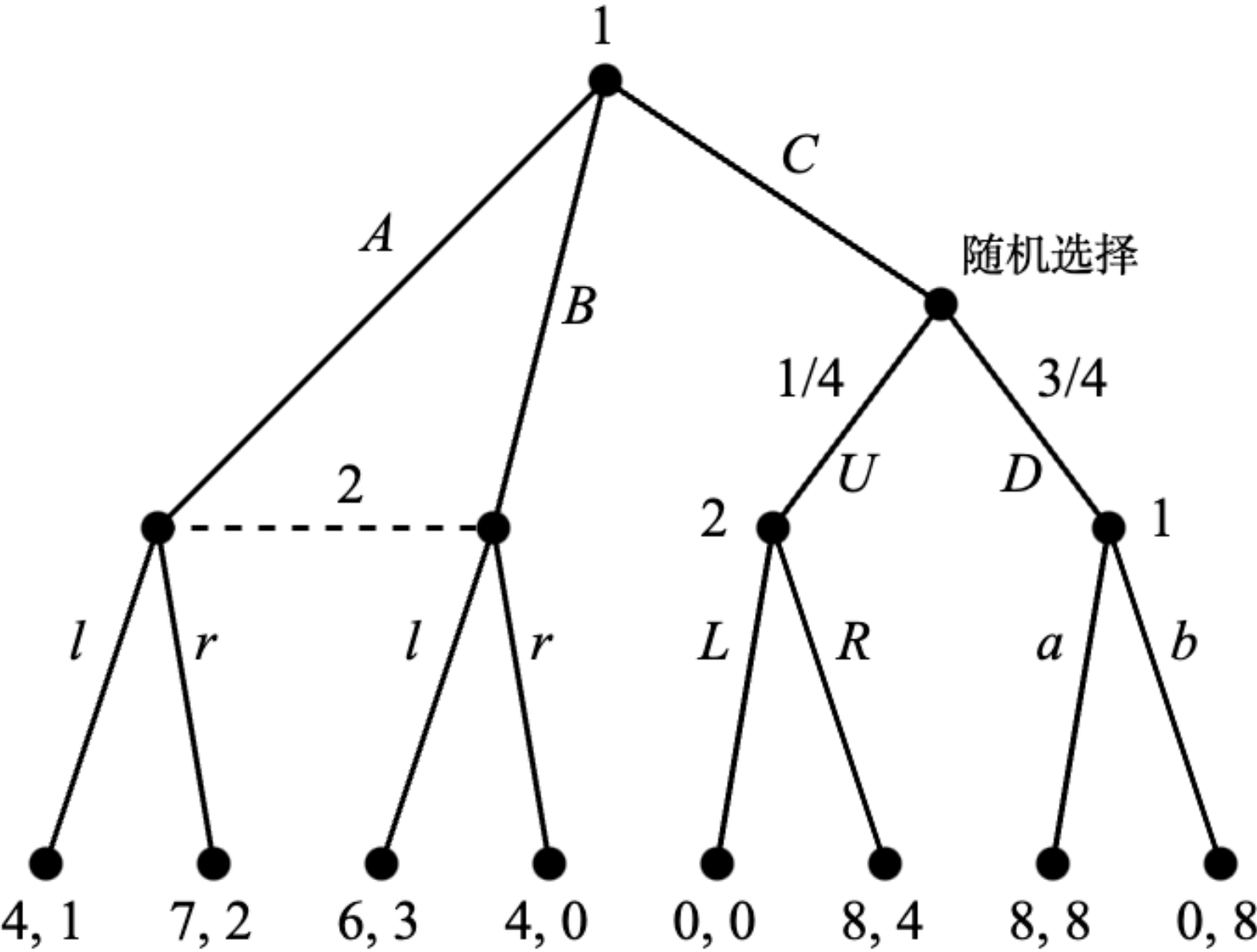
- 策略式博弈的双矩阵

	ℓL	ℓR	rL	rR
Aa	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(7, 2)$	$(7, 2)$
Ab	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(7, 2)$	$(7, 2)$
Ba	$(6, 3)$	$(6, 3)$	$(4, 0)$	$(4, 0)$
Bb	$(6, 3)$	$(6, 3)$	$(4, 0)$	$(4, 0)$
Ca	$(6, 6)$	$(8, 7)$	$(6, 6)$	$(8, 7)$
Cb	$(0, 6)$	$(2, 7)$	$(0, 6)$	$(2, 7)$

纳什均衡

扩展式博弈的纳什均衡就是它对应的策略式博弈的纳什均衡。

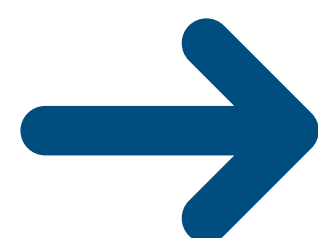
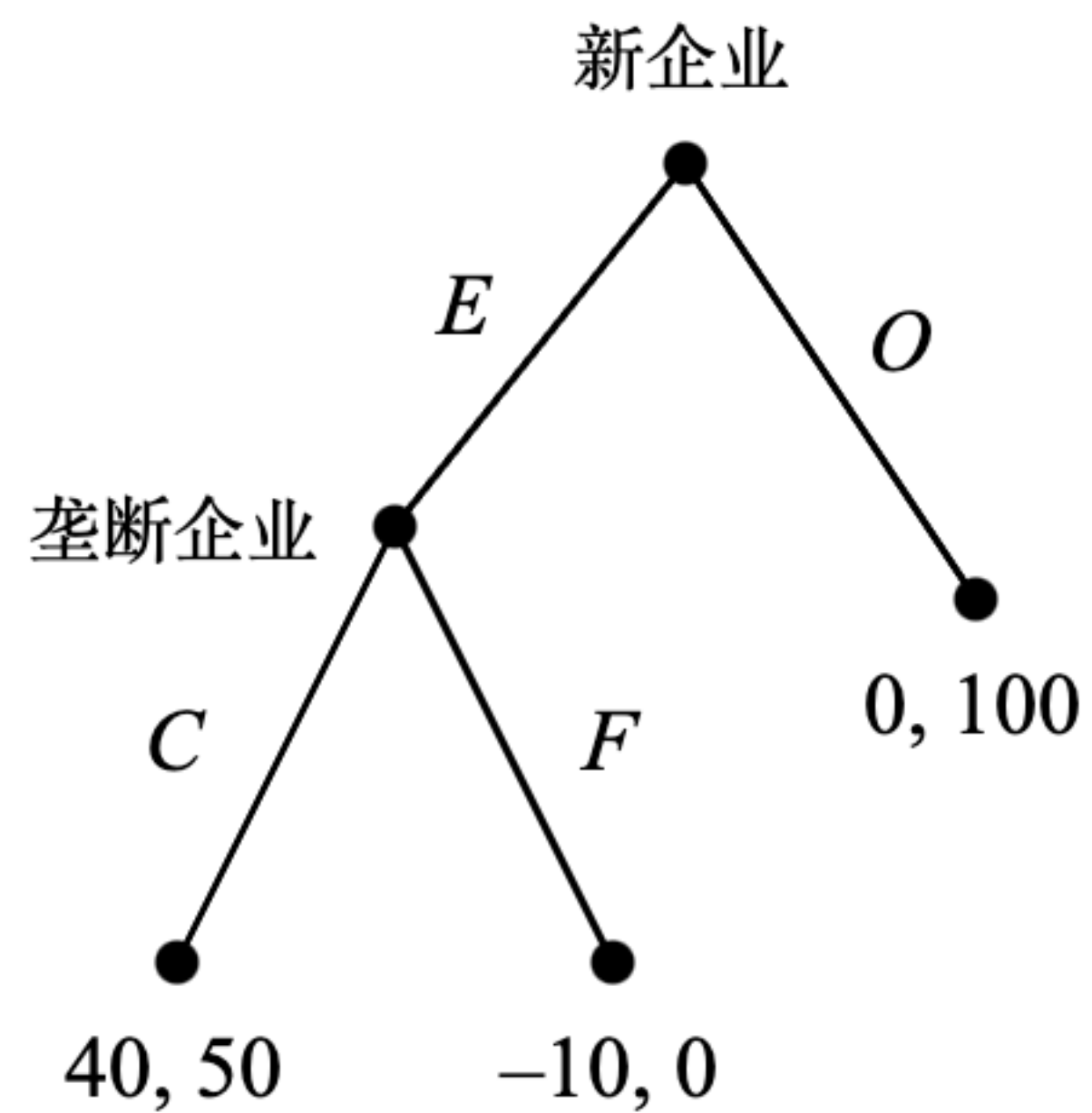
这个定义适用于纯策略和混合策略纳什均衡。



	ℓL	ℓR	rL	rR
Aa	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(\underline{7}, \underline{2})$	$(7, \underline{2})$
Ab	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(\underline{7}, \underline{2})$	$(7, \underline{2})$
Ba	$(\underline{6}, \underline{3})$	$(6, \underline{3})$	$(4, 0)$	$(4, 0)$
Bb	$(\underline{6}, \underline{3})$	$(6, \underline{3})$	$(4, 0)$	$(4, 0)$
Ca	$(\underline{6}, \underline{6})$	$(\underline{8}, \underline{7})$	$(6, 6)$	$(\underline{8}, \underline{7})$
Cb	$(0, 6)$	$(2, \underline{7})$	$(0, 6)$	$(2, \underline{7})$

练习

写出市场进入博弈的策略式表达，并找出纯策略纳什均衡。



练习

每一个扩展式博弈都对应一个策略式博弈，但是反过来则不成立。找出对应下列策略式博弈的两个扩展式博弈，其中一个为完美信息，另一个为不完美信息。

$$\begin{pmatrix} 1, 0 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 1 \\ 2, 0 & 0, 2 & 2, 0 & 0, 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$