博弈论

第五讲：不完全信息博弈

黄嘉平
深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

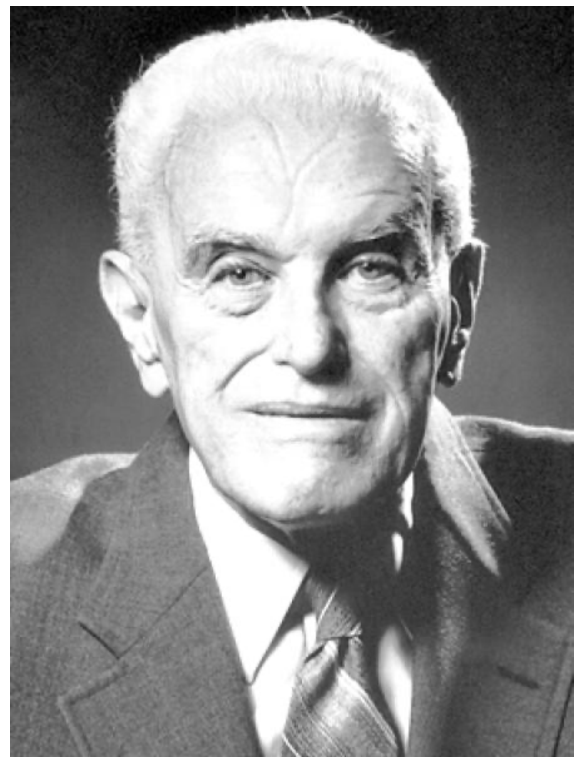
电子邮箱： huangjp@szu

课程主页： https://huangjp.com/GT/

不完全信息博弈

不完美信息与不完全信息

- **不完美信息（imperfect information）**：参与人无法完全观察其他参与人的**选择**
  - 所有同时决策单次博弈都是不完美信息博弈。
- **不完全信息（incomplete information）**：参与人无法完全了解博弈的设定或其他参与人的**特征**（例如他们的备选行动、收益函数等）
  - 1994 年诺贝尔经济学奖得主约翰·海萨尼（John C. Harsanyi）提出了利用不完美信息博弈对不完全信息建模的方法论。
  - 将参与人可能拥有的不同特征假设为该参与人的不同**类型（type）**。每个参与人都了解自己的类型，但不一定了解其他参与人的类型。
  - 如果一个参与人不了解另一个参与人的类型，则在建模时首先通过随机选择确定其类型。



约翰·海萨尼
（1920–2000）

不完全信息静态博弈

第一讲中的
性别战博弈

	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

- 静态博弈（static game）指同时决策博弈。
- 假设在性别战博弈中，参与人 1 不确定参与人 2 是否想和自己约会。这是一个不完全信息静态博弈。
- 如果我们假设参与人 2 有两个类型，每个类型对应一个收益矩阵，则此博弈可以用下面两个双矩阵表达

约会 y

	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

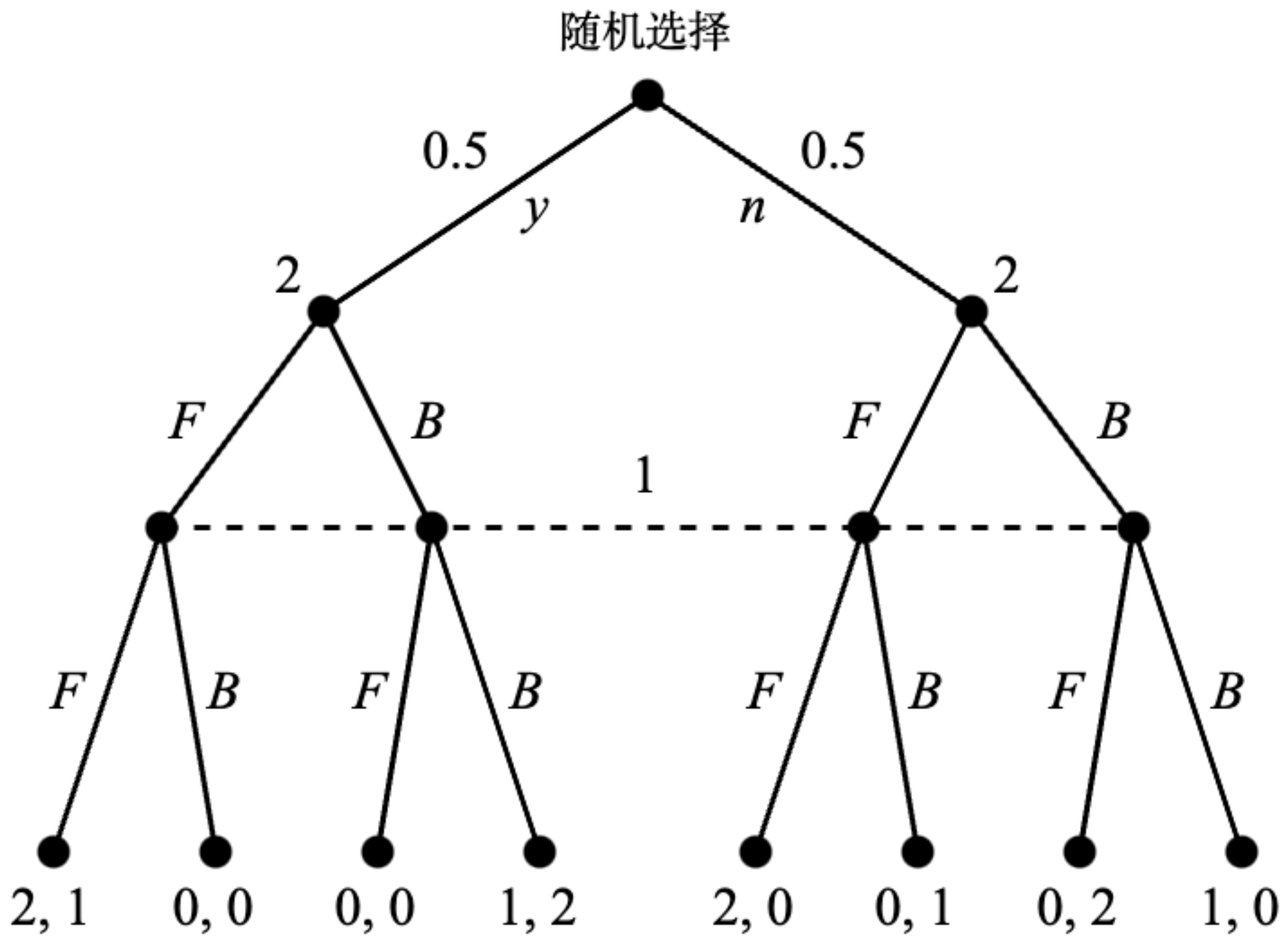
不约会 n

	足球	芭蕾
足球	2, 0	0, 2
芭蕾	0, 1	1, 0

- 假设参与人 1 认为类型 y 和类型 n 发生的概率各为 $1/2$。参与人 2 也了解这一信息。

不完全信息性别战博弈的扩展式表达

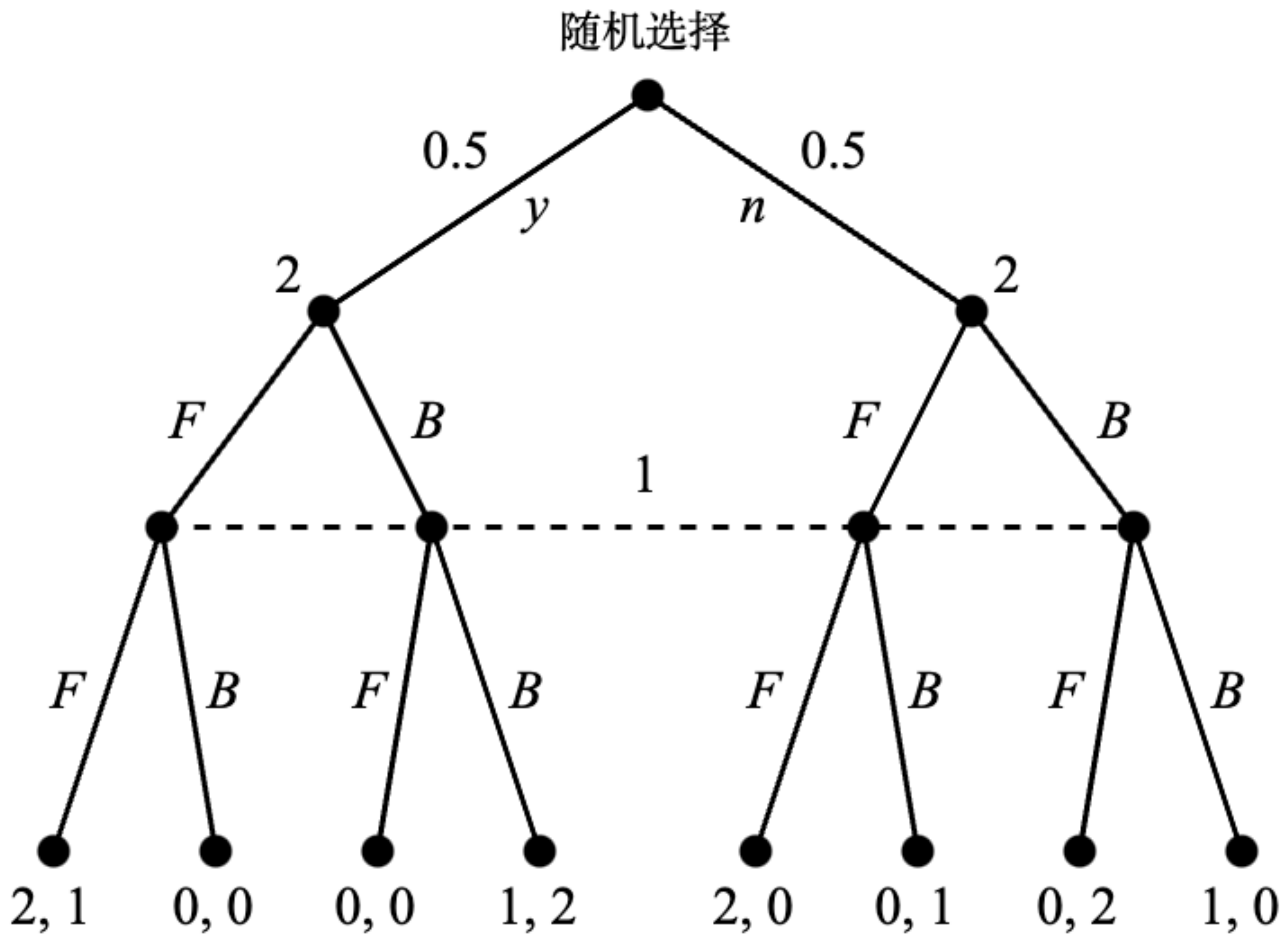
- 首先由随机选择确定参与人 2 的类型。每个类型的发生概率各是 $1/2$。
- 这里我们让参与人 2 首先选择行动。由于她知道自己的类型，因此这里会产生两个平凡信息集。
- 之后由参与人 1 进行选择。他即不了解参与人 2 的类型，也无法观察她的选择结果，因此所有四个决策节点都在同一个信息集内。
- 在八个终点里，左侧四个对应参与人 2 的类型 y，右侧四个对应她的类型 n。



- 在随机选择后面也可以让参与人 1 首先选择（实际上是同时选择），这会产生另一种博弈树。

不完全信息性别战博弈的均衡

- 唯一的子博弈是原博弈本身，因此每个纳什均衡都是子博弈完美均衡。
- 唯一的非平凡信息集可以 100% 到达，因此参与人 1 在此处的信念完全由参与人 2 的策略决定：
  - 令信念从左到右分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$。
  - 如果参与人 2 的策略是 FB，则 $\alpha_1 = \alpha_4 = 0.5$，$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$。
  - 如果参与人 2 的策略是 BB，则 $\alpha_2 = \alpha_4 = 0.5$，$\alpha_1 = \alpha_3 = 0$。
  - 其他策略也各自对应一个信念。



- 所有信念都满足贝叶斯一致性，因此每个纳什均衡和它对应的信念都能组成完美贝叶斯均衡。

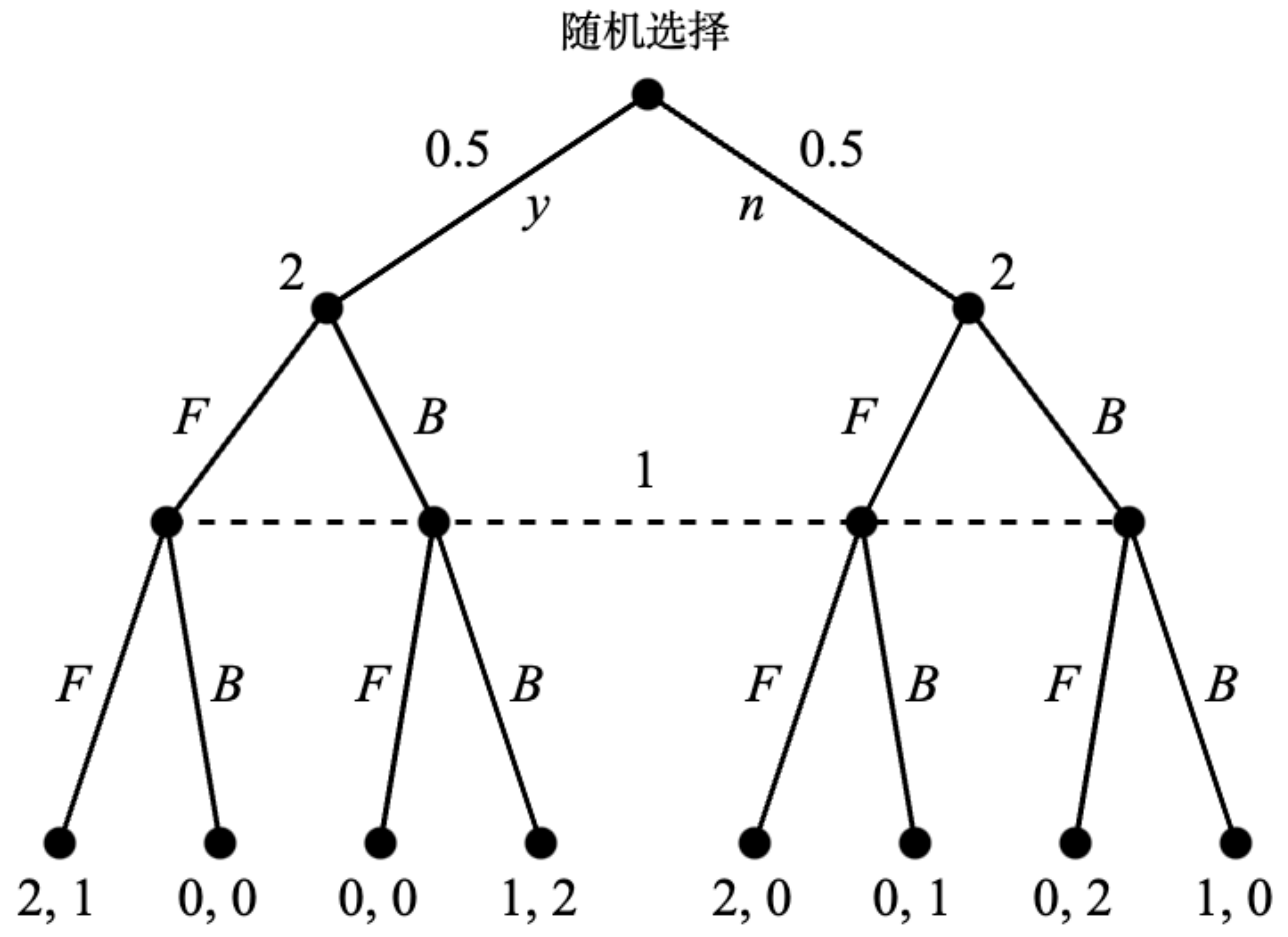
不完全信息性别战博弈的均衡

- 策略式表达和纳什均衡：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} FF & FB & BF & BB \end{array} \\
\begin{array}{c} F \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} \underline{2}, 0.5 & \underline{1}, \underline{1.5} & \underline{1}, 0 & 0, 1 \\ 0, 0.5 & 0.5, 0 & 0.5, \underline{1.5} & \underline{1}, 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

唯一的纯策略纳什均衡是 (F, FB)。

贝叶斯均衡（Bayesian equilibrium）指每个参与人的每个类型都选择最佳响应的纳什均衡。



- (F, FB) 也是贝叶斯均衡：参与人 1 的 F 是 FB 的最佳响应；类型 y 的参与人 2 的 F 和类型 n 的参与人 2 的 B 都是参与人 1 的 F 的最佳响应。

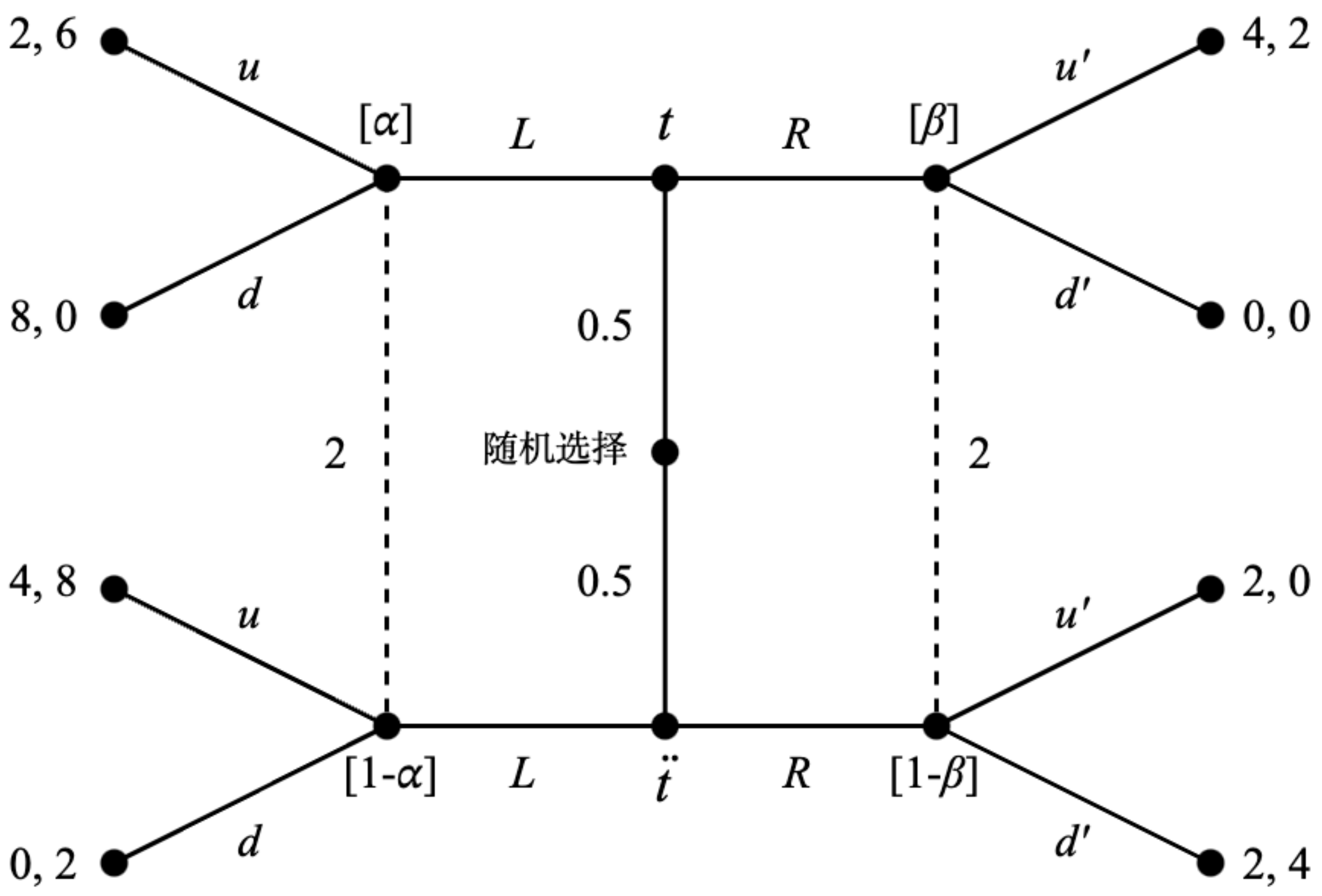
不完全信息动态博弈：信号传递

一个信号传递博弈

- **信号传递博弈（signaling game）**是不完全信息动态博弈的一种。“动态” 对应序贯行动。

- 在信号传递博弈中，参与人 1 有两个类型，但参与人 2 无法观察到。参与人 1 首先进行选择，之后参与人 2 再进行选择。因此参与人 2 可以观察参与人 1 的决策结果。

- 在博弈开始时，由随机选择确定参与人 1 的类型。



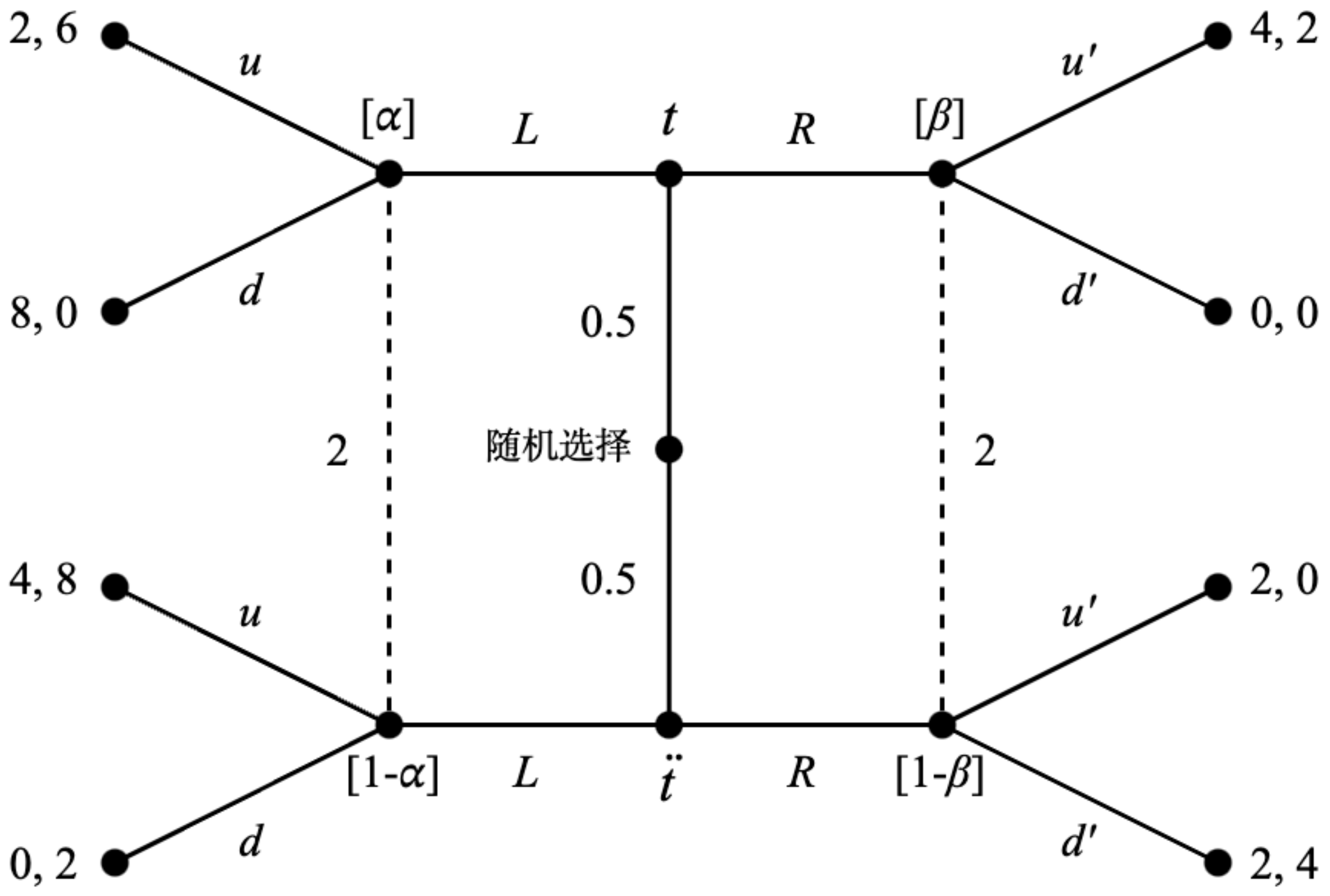
- 之所以叫做信号传递博弈，是因为参与人 2 可以通过参与人 1 的决策结果判断出他的类型。

纳什均衡

- 策略式表达：

$$
\begin{array}{c}
 \\ LL \\ LR \\ RL \\ RR
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} uu' & ud' & du' & dd' \end{array} \\
\begin{pmatrix}
3,\underline{7} & \underline{3},\underline{7} & 4,1 & 4,1 \\
2,3 & 2,\underline{5} & \underline{5},0 & \underline{5},2 \\
\underline{4},\underline{5} & 2,4 & 2,2 & 0,1 \\
3,1 & 1,\underline{2} & 3,1 & 1,\underline{2}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

其中参与人 1 的第一个行动对应类型 t。



- 纯策略纳什均衡为 (RL, uu') 和 (LL, ud')。它们都是子博弈完美均衡。

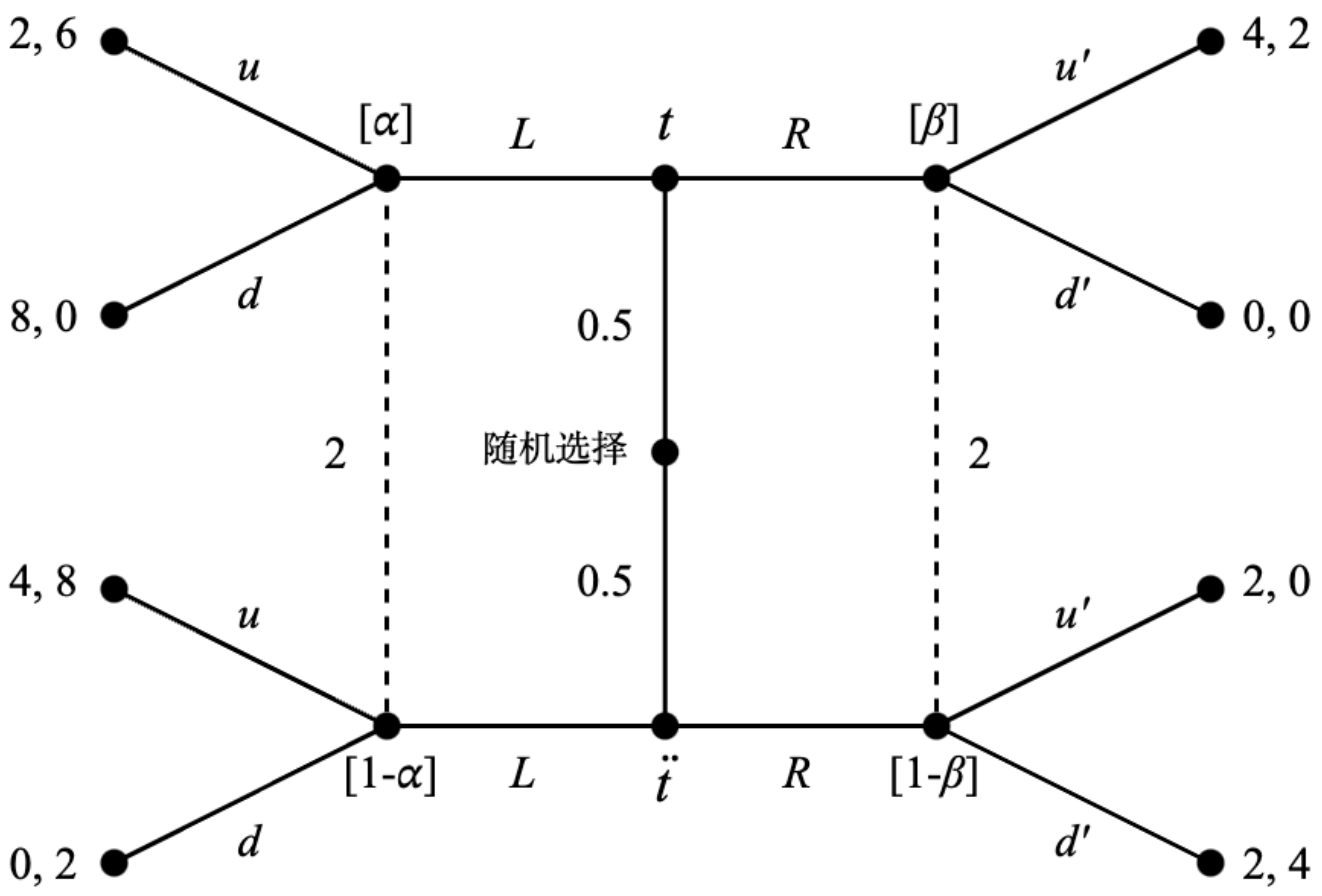
完美贝叶斯均衡

(RL, uu')

贝叶斯一致性

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \mid \text{参与人 1 选择 } L] \\
&= \frac{\text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \text{ 且选择 } L]}{\text{Prob}[\text{参与人 1 选择 } L]} \\
&= \frac{1/2 \cdot 0}{1/2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \mid \text{参与人 1 选择 } R] \\
&= \frac{\text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \text{ 且选择 } R]}{\text{Prob}[\text{参与人 1 选择 } R]} \\
&= \frac{1/2 \cdot 1}{1/2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$



完美贝叶斯均衡

(RL, uu')

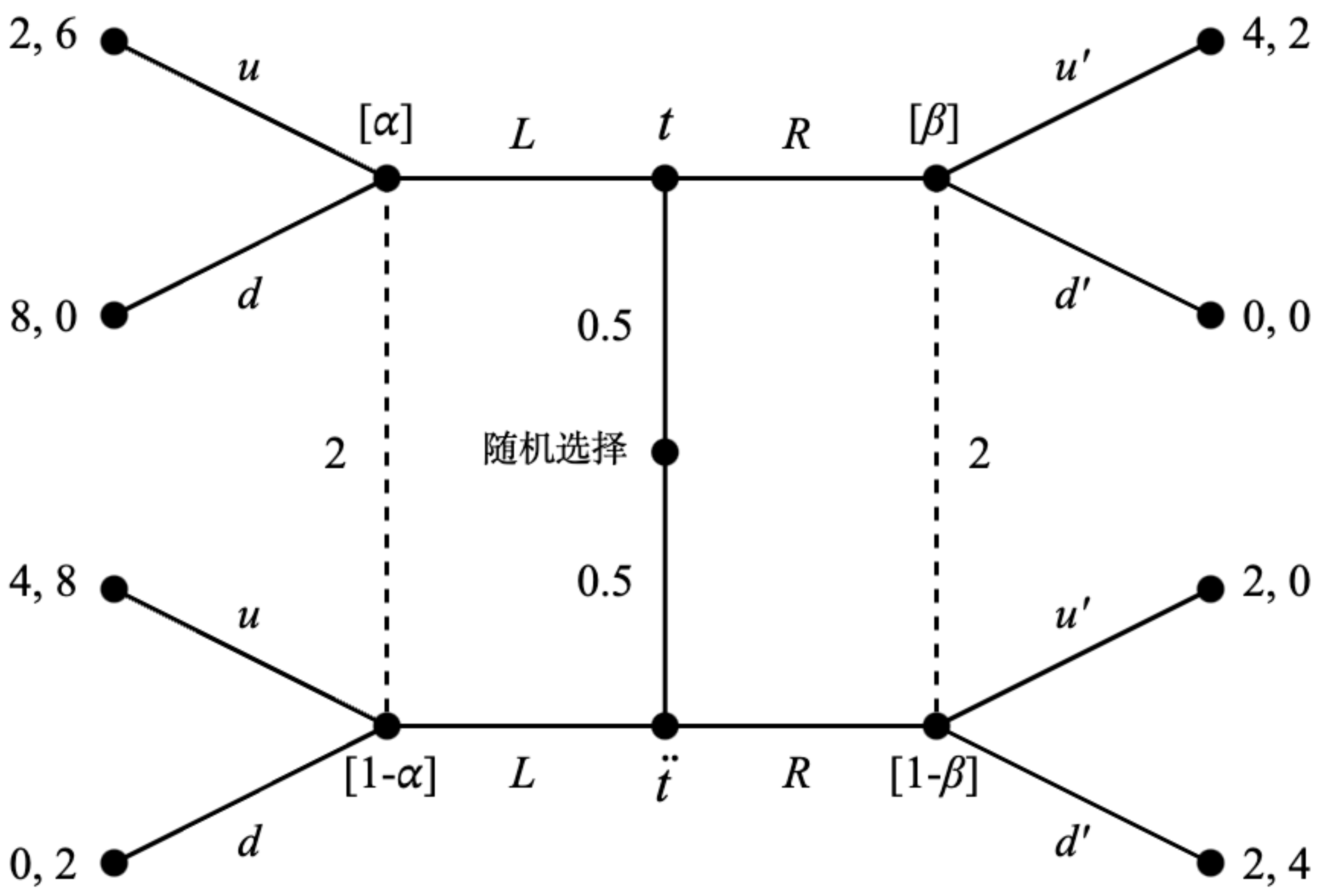
序贯理性

- 左侧信息集：

  基于信念 $\alpha = 0$，参与人 2 选择 u 的期望收益是 8，选择 d 的期望收益是 2，因此 u 优于 d。

- 右侧信息集：

  基于信念 $\beta = 1$，参与人 2 选择 u' 的期望收益是 2，选择 d' 的期望收益是 0，因此 u' 优于 d'。

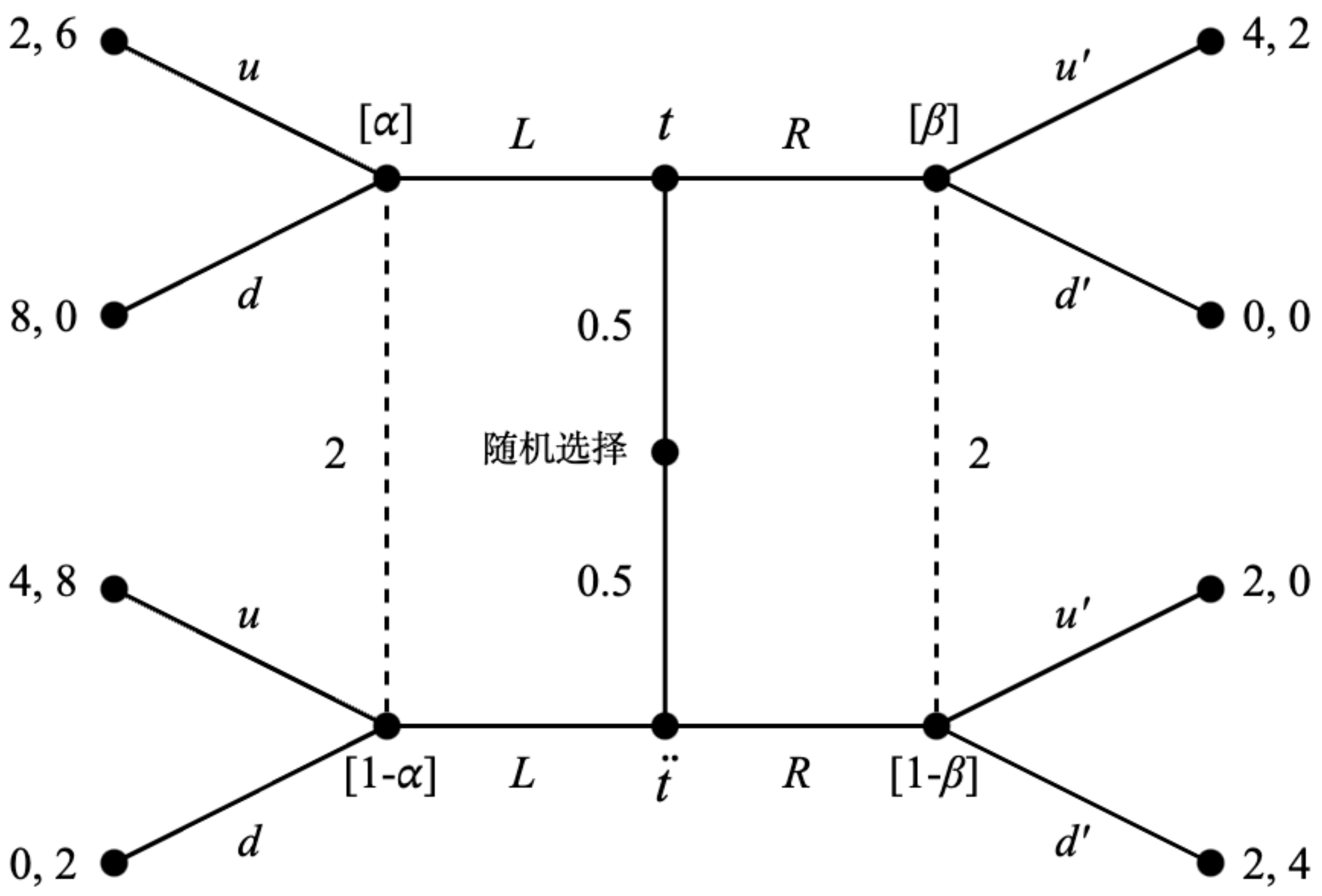


⇒ 策略组合 (RL, uu') 和信念组合 $(\alpha = 0, \beta = 1)$ 构成完美贝叶斯均衡。

分离均衡

均衡 (RL, uu') 称为**分离均衡（separating equilibrium）**，因为不同类型的参与人 1 选择不同的行动。

参与人 2 可以观察参与人 1 的行动，因此可以推断参与人 1 的类型。我们说参与人 1 的行动披露了（或者传递了）信息。



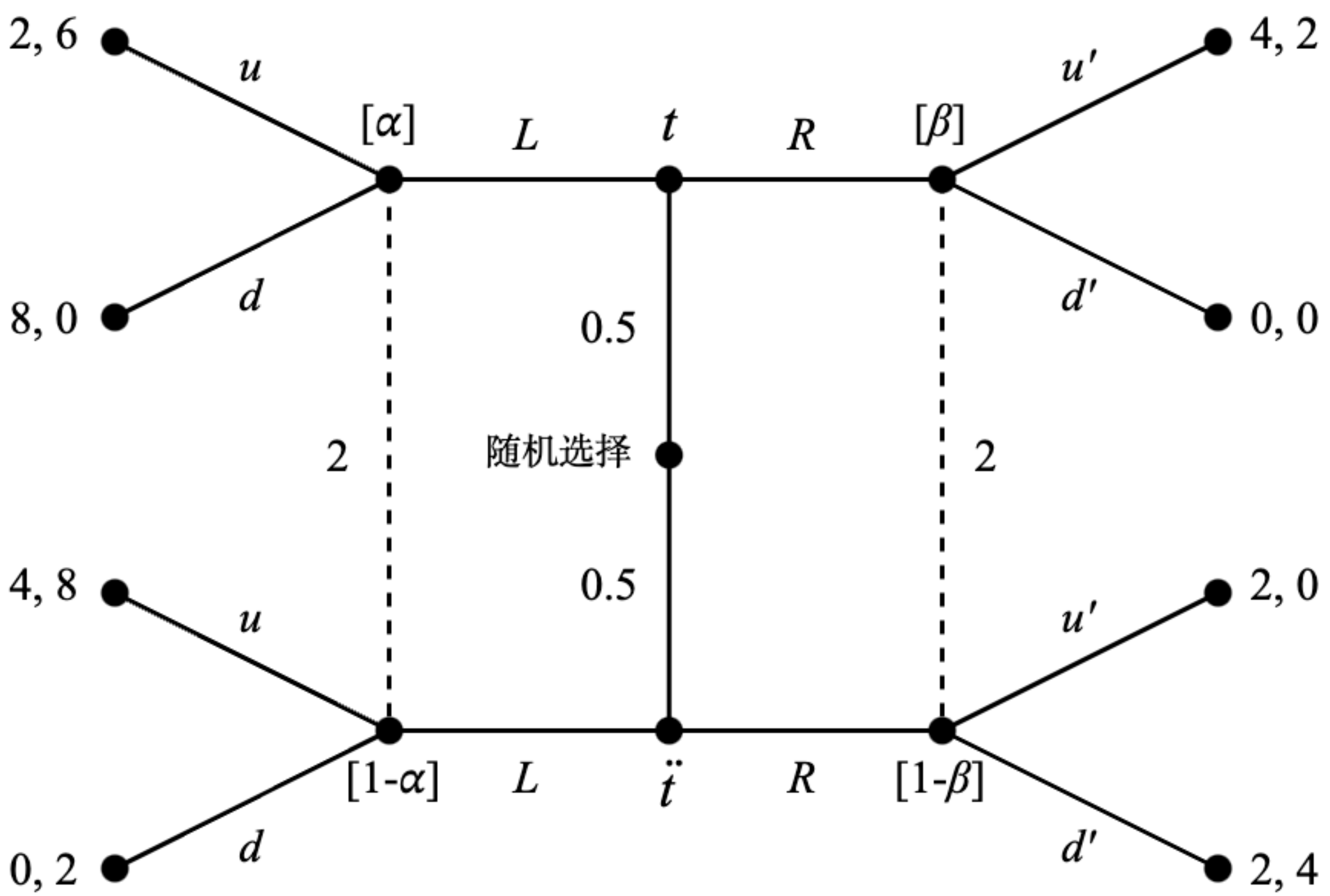
完美贝叶斯均衡

(LL, ud')

贝叶斯一致性

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \mid \text{参与人 1 选择 } L] \\
&= \frac{\text{Prob}[\text{参与人 1 的类型为 } t \text{ 且选择 } L]}{\text{Prob}[\text{参与人 1 选择 } L]} \\
&= \frac{1/2 \cdot 1}{1} \\
&= 1/2
\end{aligned}
$$

右侧信息集的到达概率为零，因此无法通过贝叶斯一致性计算 β 的值。



完美贝叶斯均衡

(LL, ud')

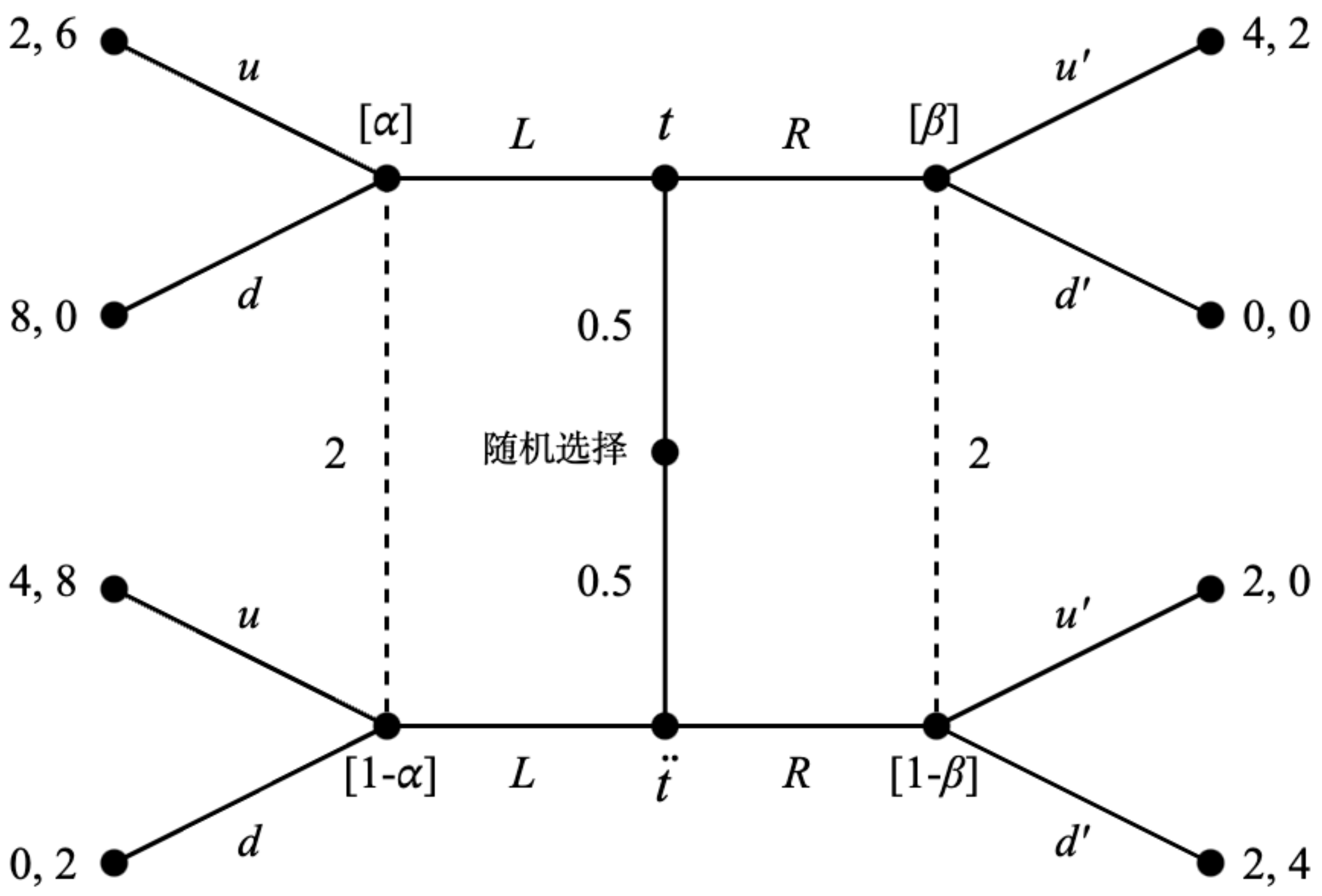
序贯理性

- 左侧信息集：

  基于信念 $\alpha = 1/2$，参与人 2 选择 u 的期望收益是 7，选择 d 的期望收益是 1，因此 u 优于 d。

- 右侧信息集：

  参与人 2 选择 u' 的期望收益是 2β，选择 d' 的期望收益是 $4-4\beta$，因此当 $\beta \leq 2/3$ 时 d' 优于 u'。

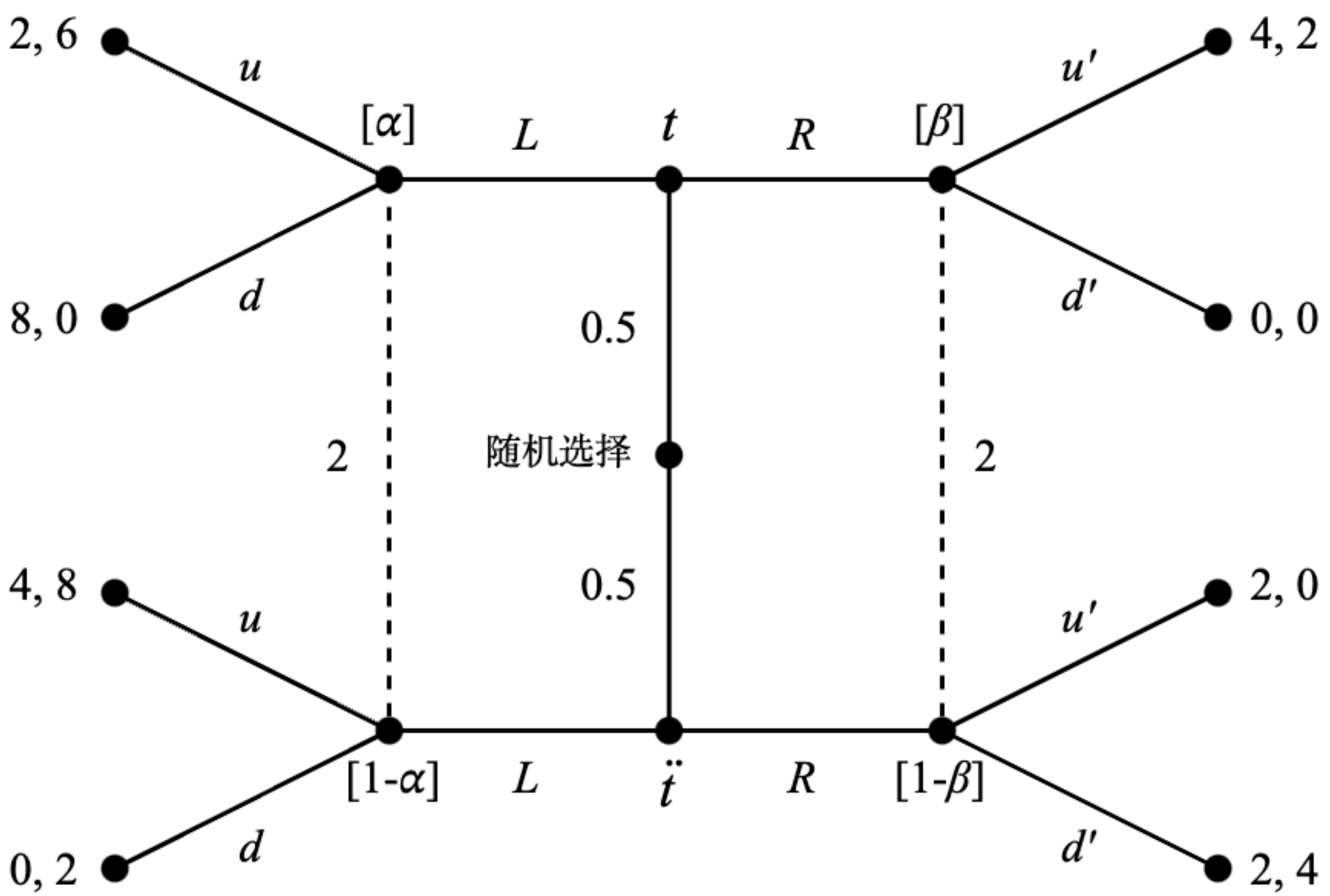


$\Rightarrow$ 策略组合 (LL, ud') 和任意信念组合 $(\alpha = 1/2, \beta \leq 2/3)$ 都能构成完美贝叶斯均衡。

混同均衡

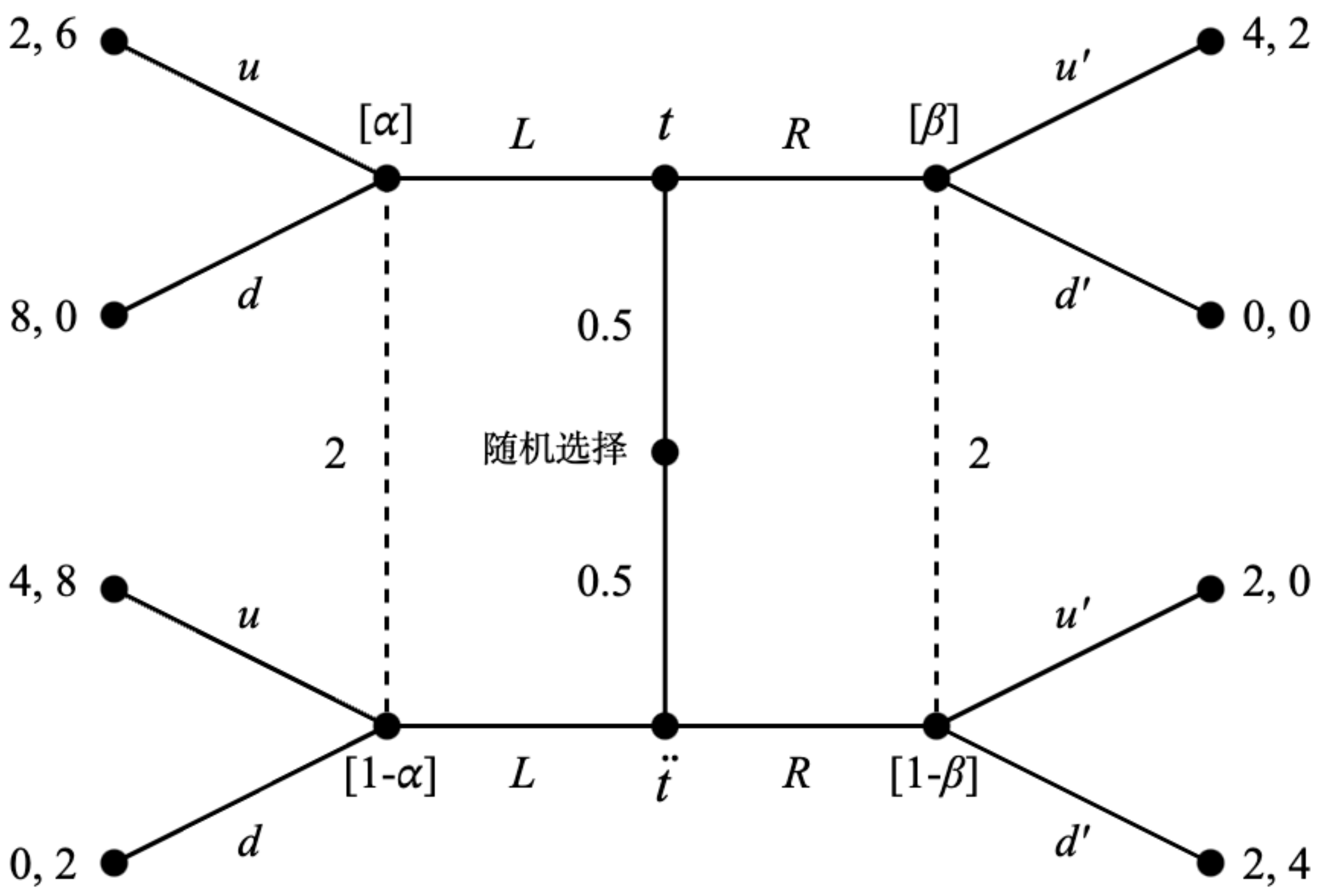
均衡 (LL, ud') 称为**混同均衡（pooling equilibrium）**，因为不同类型的参与人 1 选择相同的行动。

参与人 2 无法通过观察参与人 1 的选择推断他的类型。因此，参与人 1 的行动无法起到披露信息的作用。



直观准则*

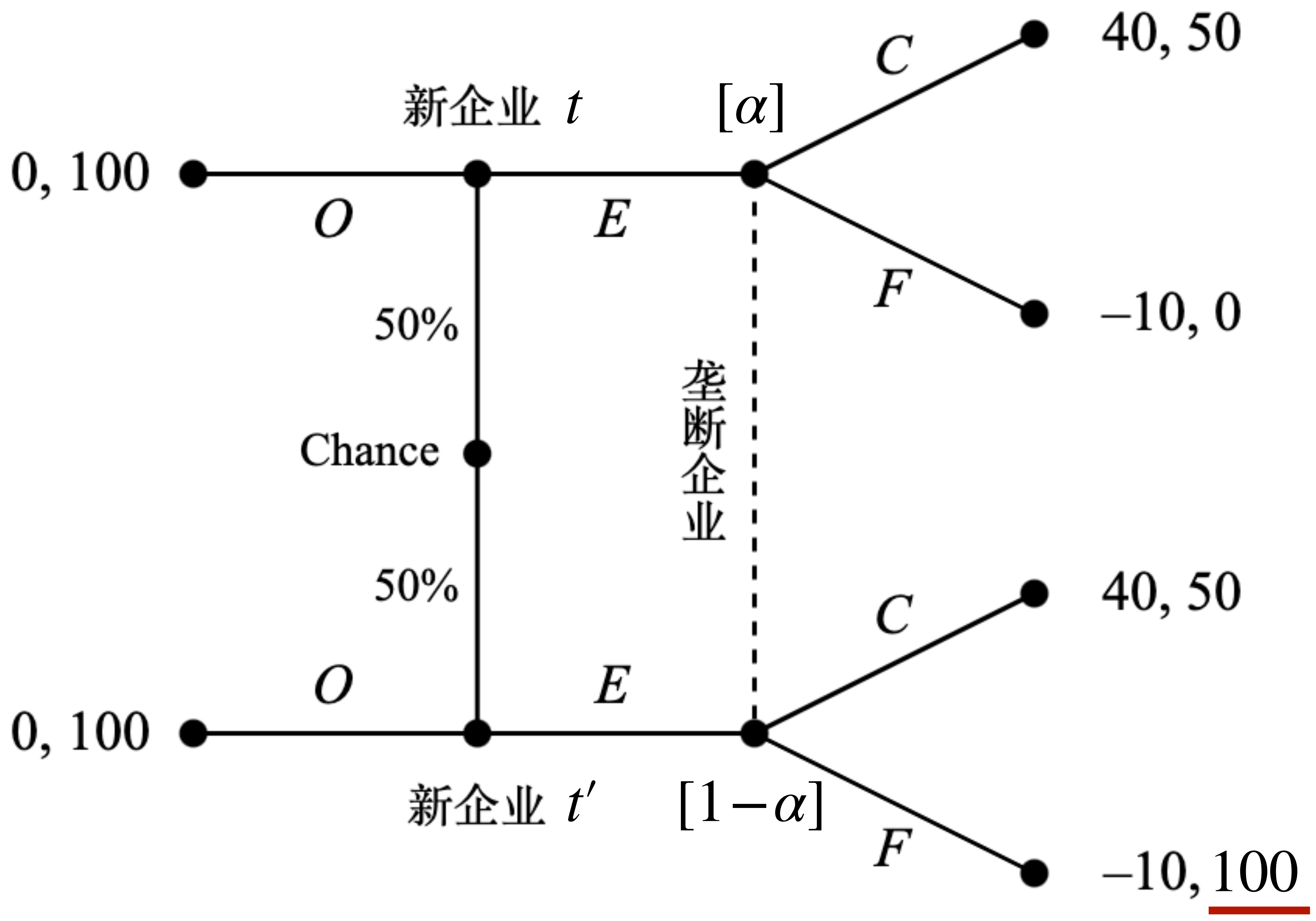
- 如何在均衡 (RL, uu') 和 (LL, ud') 之间做出选择呢?
- (RL, uu') 中到达参与人 2 的两个信息集的概率都为正，而 (LL, ud') 中右侧的信息集的到达概率则为零。参与人 2 在 (LL, ud') 的右侧信息集中可以自由选择信念，但这是合理的吗?
- (LL, ud') 成为完美贝叶斯均衡的条件是 $\beta \leq 2/3$。此时，类型 $\ddot{t}$ 的参与人 1 选择 L 的收益是 4，而选择 R 时可获得的最大收益是 2，因此他没有理由选择 R。据此，参与人 2 应当赋予 $1-\beta=0$，即 $\beta=1$。这个时候，我们说 (LL, ud') 和 $\beta \leq 2/3$ 的组合不满足**直观准则（intuitive criterion）**。



不完全信息下的市场进入博弈

- 右侧的博弈是第一讲中介绍的不完全信息市场进入博弈的一个具体例子（右下角的收益由 x 变为 100）。
- 策略式博弈：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \qquad C \qquad & \qquad F \qquad \end{array} \\
\begin{array}{c} OO \\ OE \\ EO \\ EE \end{array} &
\begin{pmatrix}
0, \underline{100} & \underline{0}, \underline{100} \\
20, 75 & -5, \underline{100} \\
20, \underline{75} & -5, 50 \\
\underline{40}, \underline{50} & -10, \underline{50}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



纳什均衡为 (OO, F) 和 (EE, C)。它们都是子博弈完美均衡。

不完全信息下的市场进入博弈

(OO, F)

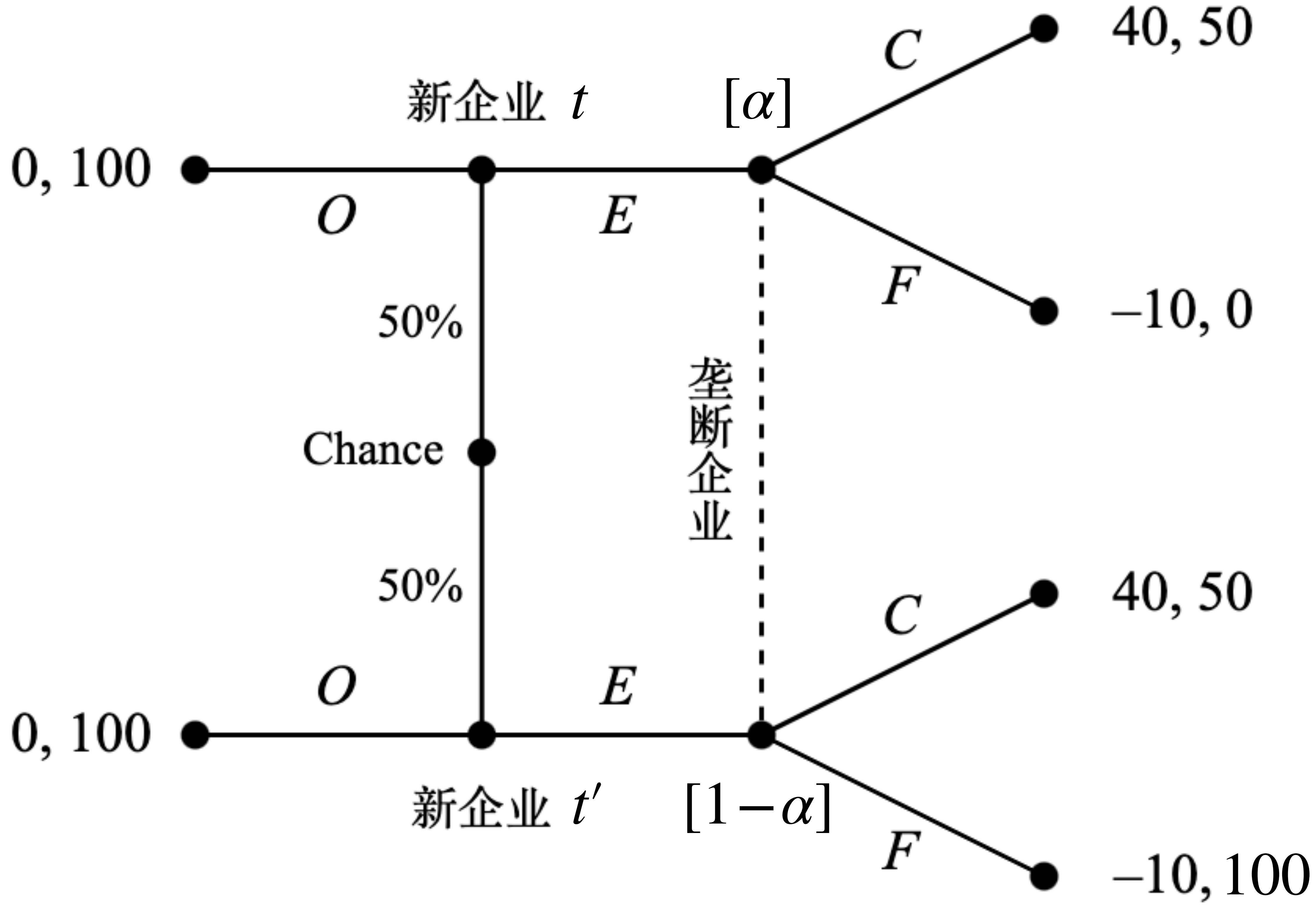
贝叶斯一致性

垄断企业的信息集的到达概率为零，因此可以自由选择 α。

序贯理性

垄断企业选择 C 的收益是 50，选择 F 的收益是 $100(1-\alpha)$，因此当 $\alpha \le 1/2$ 时 F 优于 C。

$\Rightarrow$ 策略组合 (OO, F) 和信念 $\alpha \le 1/2$ 构成完美贝叶斯均衡。这是一个混同均衡。



不完全信息下的市场进入博弈

(EE, C)

贝叶斯一致性

垄断企业的信息集的到达概率为 $100\,\%$，根据贝叶斯公式可得 $\alpha = 1/2$。

序贯理性

垄断企业选择 C 的收益是 50，选择 F 的收益也是 50，因此 C 和 F 都是最优选择。

$\Rightarrow$ 策略组合 (EE, C) 和信念 $\alpha = 1/2$ 构成完美贝叶斯均衡。这是一个混同均衡。