博弈论

第七讲：合作博弈（一）

黄嘉平
深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

电子邮箱： huangjp@szu

课程主页： https://huangjp.com/GT/

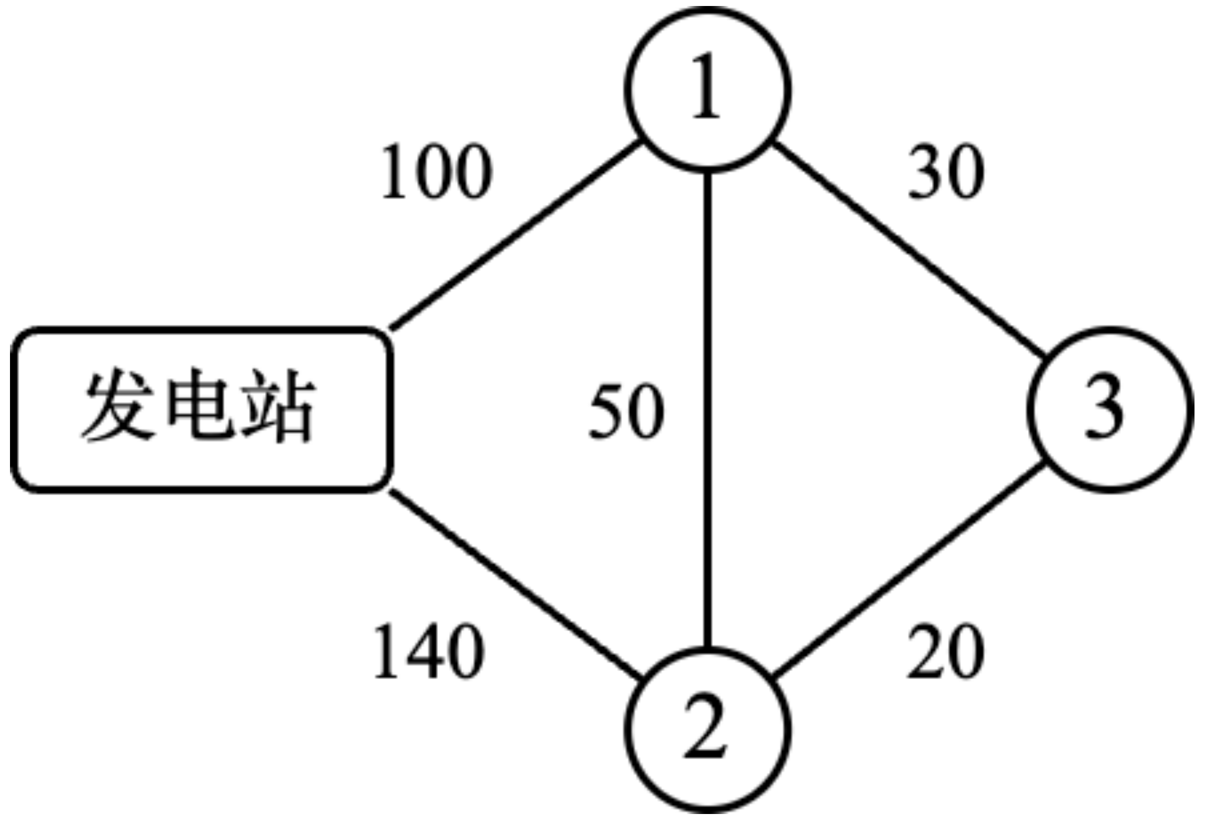
合作博弈的例子和基本概念

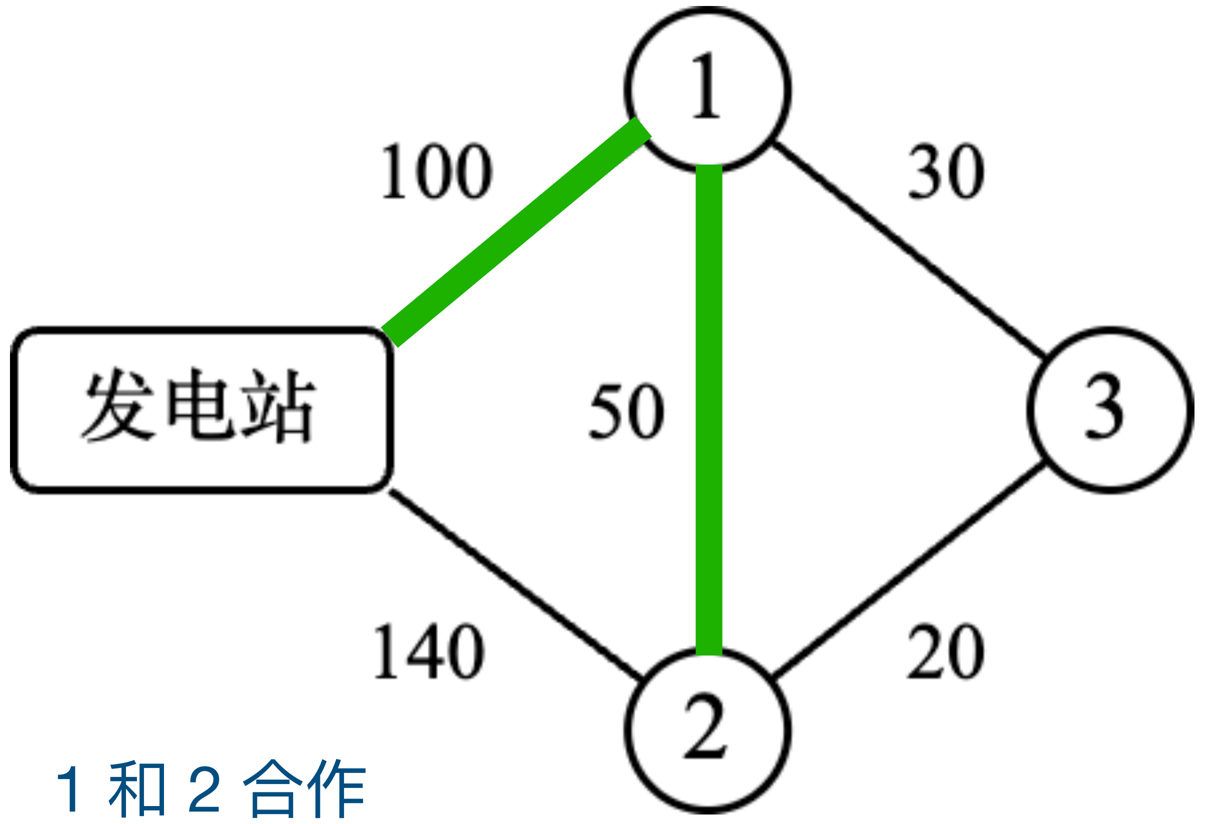
三城博弈

- 城市 1、2、3 共享一座发电站。从发电站到城市间的输电网络和距离（即输电成本）如右图所示。
- 参与人集合是 $N=\{1,2,3\}$。对任意联盟 $S\subseteq N$，令 $c(S)$ 为该联盟的输电成本，$v(S)=\sum_{i\in S}c(\{i\})-c(S)$ 为该联盟成员通过结盟节省的总成本。

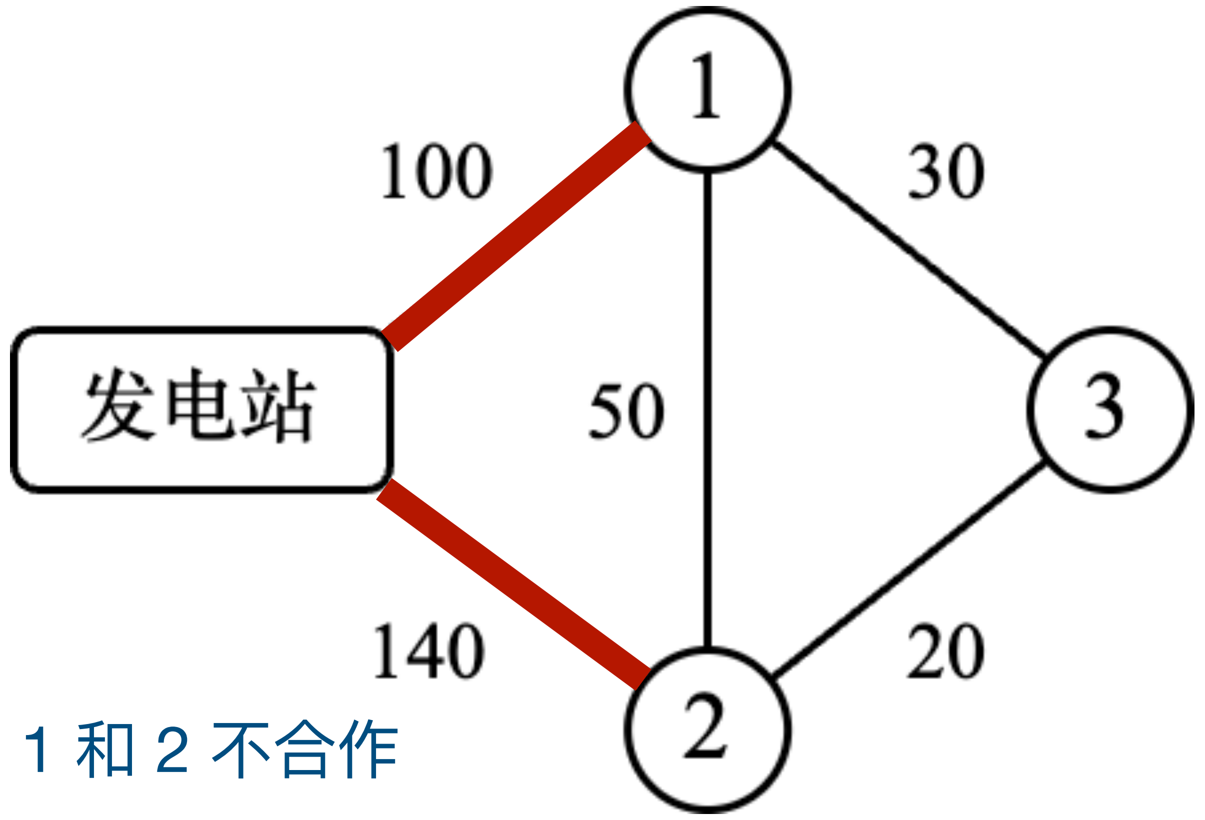
S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

- 空集 $\emptyset$ 也是一个联盟，它不产生价值，因此我们令 $v(\emptyset)=0$。





1 和 2 合作



1 和 2 不合作

手套博弈

- 共有三个参与人 1、2、3。参与人 1 和 2 各自拥有一只右手的手套，而参与人 3 拥有一只左手的手套。一副手套的价值是 1，而一只手套的价值是 0。
- 令 $v(S)$ 代表联盟 S 的成员所持有的手套的总价值，则有

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1

排列博弈

- 小张、小李和小王分别在星期一、二、三约了牙医。但是这个安排对他们来说并不是最好的。三人对日期的偏好可以用右表中数字（可以理解为满意度）的大小表达。

	星期一	星期二	星期三
小张	2	4	8
小李	10	5	2
小王	10	6	4

- 假设联盟成员间可以任意调换预约日期。$v(S)$ 是联盟 S 成员可以获得的最大满意度之和。

S	{张}	{李}	{王}	{张, 李}	{张, 王}	{李, 王}	{张, 李, 王}
$v(S)$	2	5	4	14	18	9	24

投票博弈

- 联合国安全理事会中有五个常任理事国（分别是英国、俄罗斯、法国、美国、中国）和十个非常任理事国。若要通过一项动议需要包括所有常任理事国在内的至少九个理事国同意。
- 如果联盟 S 的成员全部投赞成票时能使动议通过，则称 S 为胜利联盟，如果不能通过则称其为失败联盟。通常假设胜利联盟的价值为 1，失败联盟的价值为 0。
- 此博弈共有 $2^{15} = 32768$ 个联盟，因此无法以表格形式表达联盟价值。下面是函数 $v(S)$ 的函数表达

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } \{1,\ldots,5\} \subseteq S \text{ and } |S| \geq 9 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

合作博弈的基本概念

- 合作博弈分为**效用可转移博弈（transferable utility game, TU-game）**和**效用不可转移博弈（non-transferable utility game, NTU-game）**。这门课程中讨论的都是效用可转移博弈。

效用可转移合作博弈（TU-game）是由参与人集合 N 和**特征函数（characteristic function）**v 组成的二元组 (N, v)。其中 v 赋予每个联盟 $S \subseteq N$ 一个实数值 $v(S)$，代表联盟 S 产生的价值。v 还需满足 $v(\emptyset) = 0$。联盟 N 称为全体联盟（或大联盟）。

联盟 S 的成员可以对该联盟的价值 $v(S)$ 进行分配，我们称其为收益分配（payoff distribution）或收益向量（payoff vector），写作 $(x_i)_{i \in S}$。

合作博弈的目的

- 合作博弈主要关心两个问题：
  1. 哪个联盟会结成?
  2. 如何在成员间分配联盟的价值?

- 第一个问题往往取决于第二个问题的答案，因此应该如何分配联盟价值是合作博弈的主要研究问题，尤其是全体联盟的价值分配。
- 合作博弈属于规范经济学（normative economics）的范畴。
  - **规范经济学（normative economics）**：讨论人们应该怎么做。可以给出建议。
  - **实证经济学（positive economics）**：解释现实中人们是怎么做的。可以给出预测。

合作博弈的解

全体联盟的收益分配

全体联盟 $N = \{1, \ldots, n\}$ 的收益分配记作 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$。任意非空联盟 S 的成员在收益分配 $\boldsymbol{x}$ 中获得的总收益是 $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$。

我们希望收益分配具有以下性质：

- **有效性（efficiency）**：$x(N) = v(N)$
  （全体联盟的价值完整地被分配给成员）
- **个体理性（individual rationality）**：$x_i \geq v(\{i\}),\ i \in N$
  （每个成员至少获得不加入联盟时能够获得的收益 $\Rightarrow$ 加入全体联盟不会给个人带来损失）
- **联盟理性（coalitional rationality）**：$x(S) \geq v(S),\ \emptyset \neq S \subseteq N$
  （如果全体联盟中的部分成员结盟为 S，则该联盟产生的价值不会大于这些成员从全体联盟中获得的总收益 $\Rightarrow$ 全体联盟优于其他联盟）
  注意：根据联盟的定义，任意的 $\{i\}$ 也是联盟，因此联盟理性可以推导出个体理性。

博弈的核

TU-game (N, v) 的**核（core）**是集合

$$C(N, v) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N) \text{ and } x(S) \geq v(S) \text{ for } \emptyset \neq S \subseteq N \right\}。$$

也就是说，(N, v) 的核是所有有效的具有联盟理性的收益分配的集合。

- 三城博弈

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

收益分配 $(70, 70, 80)$ 显然满足有效性和联盟理性，因此它是一个核分配。

核的代数与几何表达

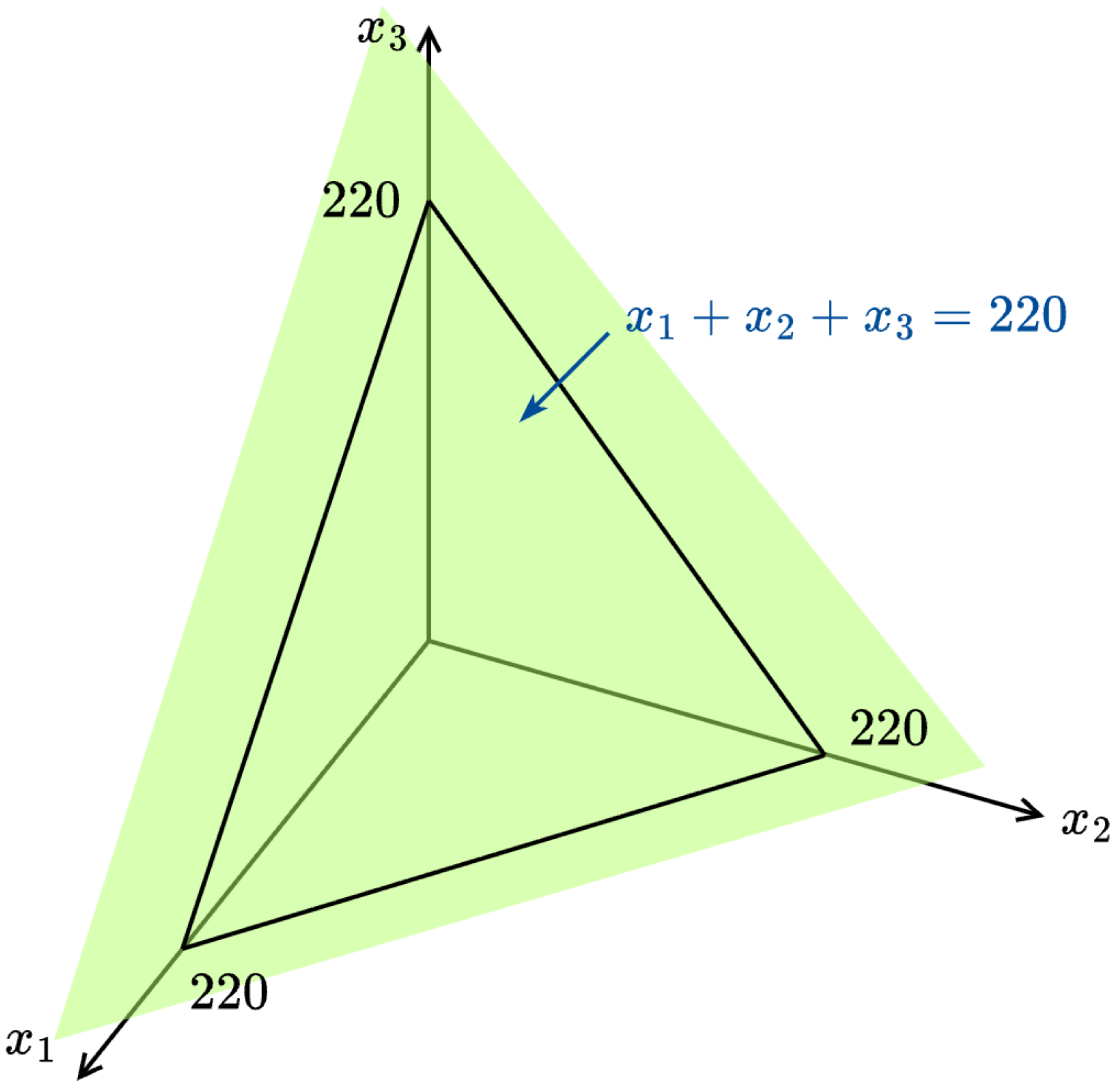
以三城博弈为例

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

- 从定义可知此博弈的核为

$$
\begin{aligned}
C = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 \geq 90, \\
& x_1 + x_3 \geq 100, \\
& x_2 + x_3 \geq 120, \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 220)\Big\}
\end{aligned}
$$

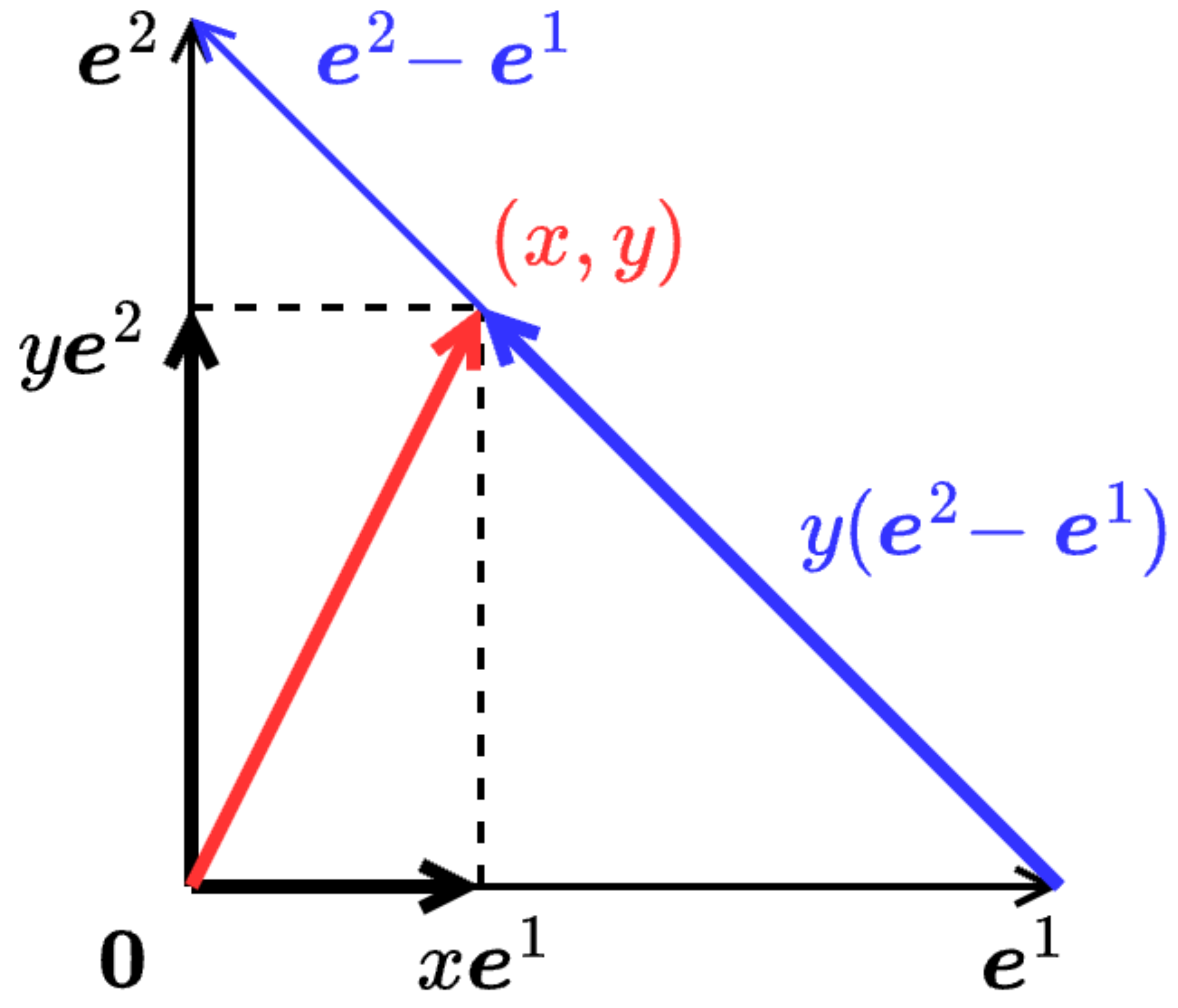
- 由有效性条件 $x_1 + x_2 + x_3 = 220$ 可知，核分配都在三维实数空间中的同一个平面上，如右图。（四人以上时无法绘图）



补充：$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=K\}$ 是一条直线

首先考虑 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$。

$$\begin{aligned}(x,y) &= x\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 \\ &= \boldsymbol{e}^1 + (x-1)\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 \\ &= \boldsymbol{e}^1 - y\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 \\ &= \boldsymbol{e}^1 + y(\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^1)\end{aligned}$$



因此，(x,y) 是以 $\boldsymbol{e}^1$ 为原点，由向量 $\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^1$ 张成的直线。
$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$ 是通过 $\boldsymbol{e}^1$ 和 $\boldsymbol{e}^2$ 两点的直线。

由于 $x+y=K \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x}{K}+\dfrac{y}{K}=1$，令 $x'=\dfrac{x}{K}, y'=\dfrac{y}{K}$ 可得

$$(x,y) = K(x',y') = K\boldsymbol{e}^1 + y'K(\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^1) = K\boldsymbol{e}^1 + y'(K\boldsymbol{e}^2 - K\boldsymbol{e}^1)$$

因此 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=K\}$ 是通过 $K\boldsymbol{e}^1$ 和 $K\boldsymbol{e}^2$ 两点的直线。

补充：$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = K\}$ 是一个平面

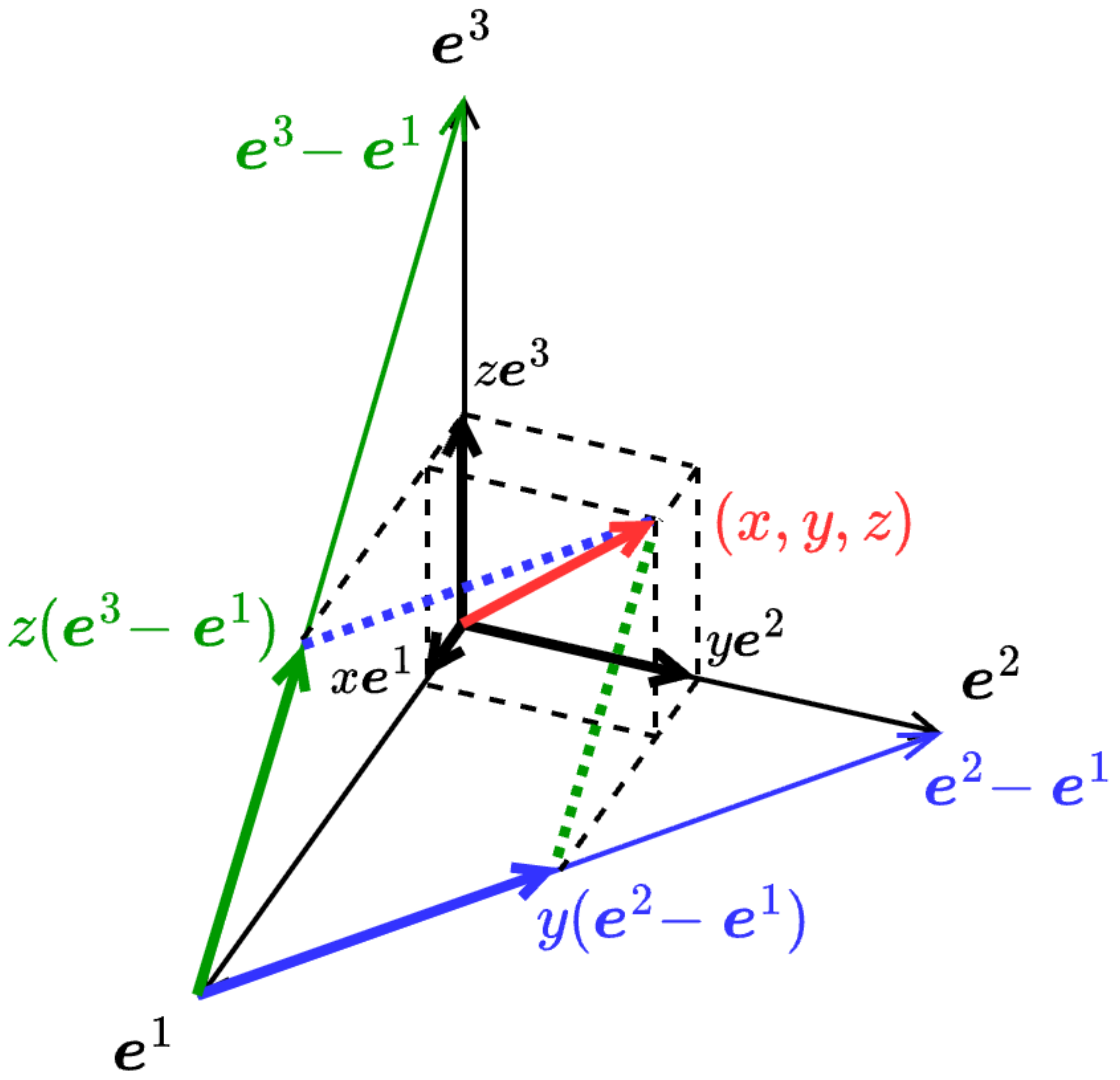
依然首先考虑 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$。

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= x\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 + z\boldsymbol{e}^3 \\ &= \boldsymbol{e}^1 + (x-1)\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 + z\boldsymbol{e}^3 \\ &= \boldsymbol{e}^1 + (-y-z)\boldsymbol{e}^1 + y\boldsymbol{e}^2 + z\boldsymbol{e}^3 \\ &= \boldsymbol{e}^1 + y(\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^1) + z(\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^1)\end{aligned}$$

因此，(x, y, z) 可以看作是以 $\boldsymbol{e}^1$ 为原点，由向量 $\boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^1$ 和 $\boldsymbol{e}^3 - \boldsymbol{e}^1$ 张成的平面。

$\Rightarrow$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ 是通过 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2$ 和 $\boldsymbol{e}^3$ 三点的平面。

$\Rightarrow$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = K\}$ 是通过 $K\boldsymbol{e}^1, K\boldsymbol{e}^2$ 和 $K\boldsymbol{e}^3$ 三点的平面。

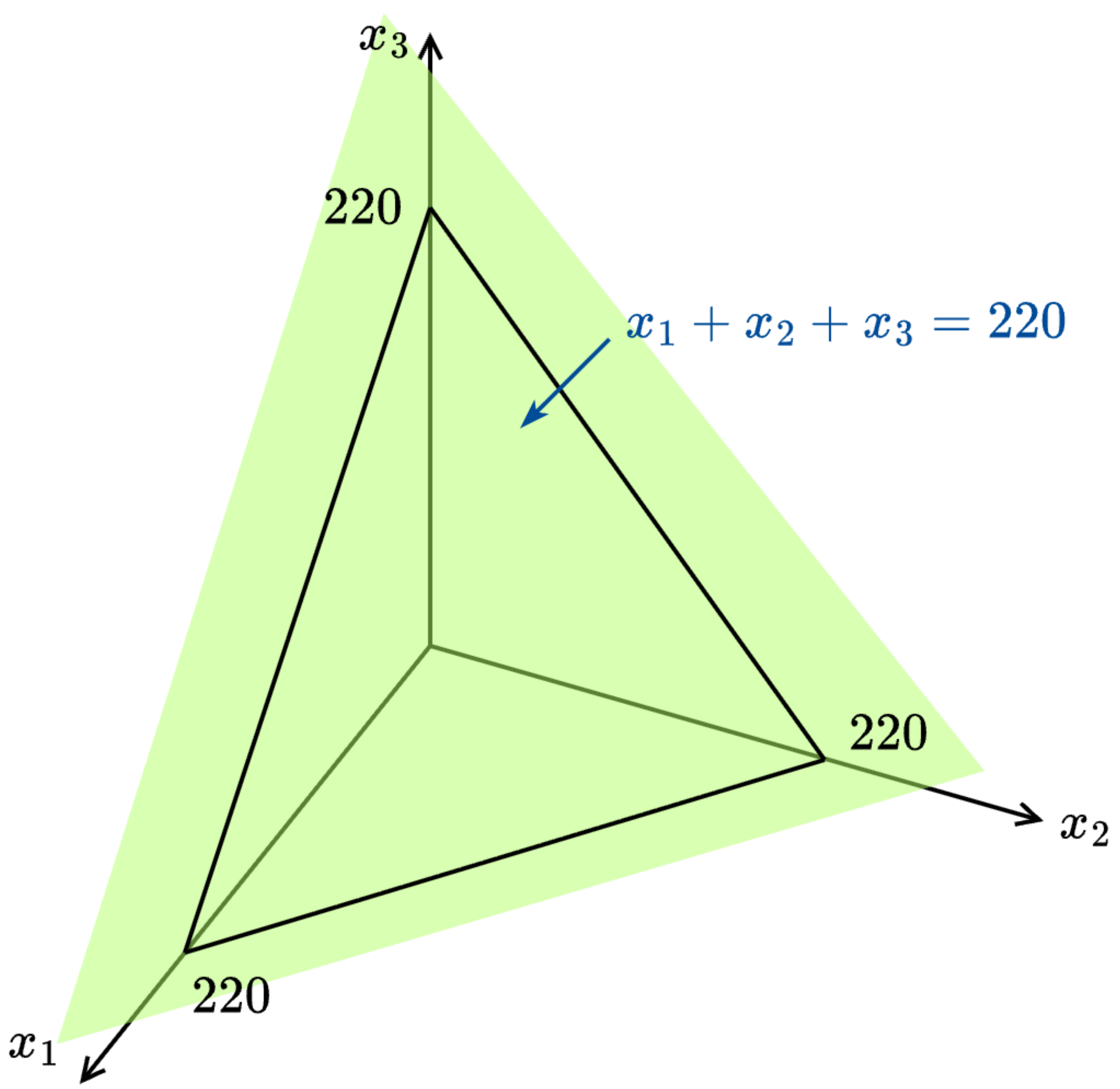


核的代数与几何表达

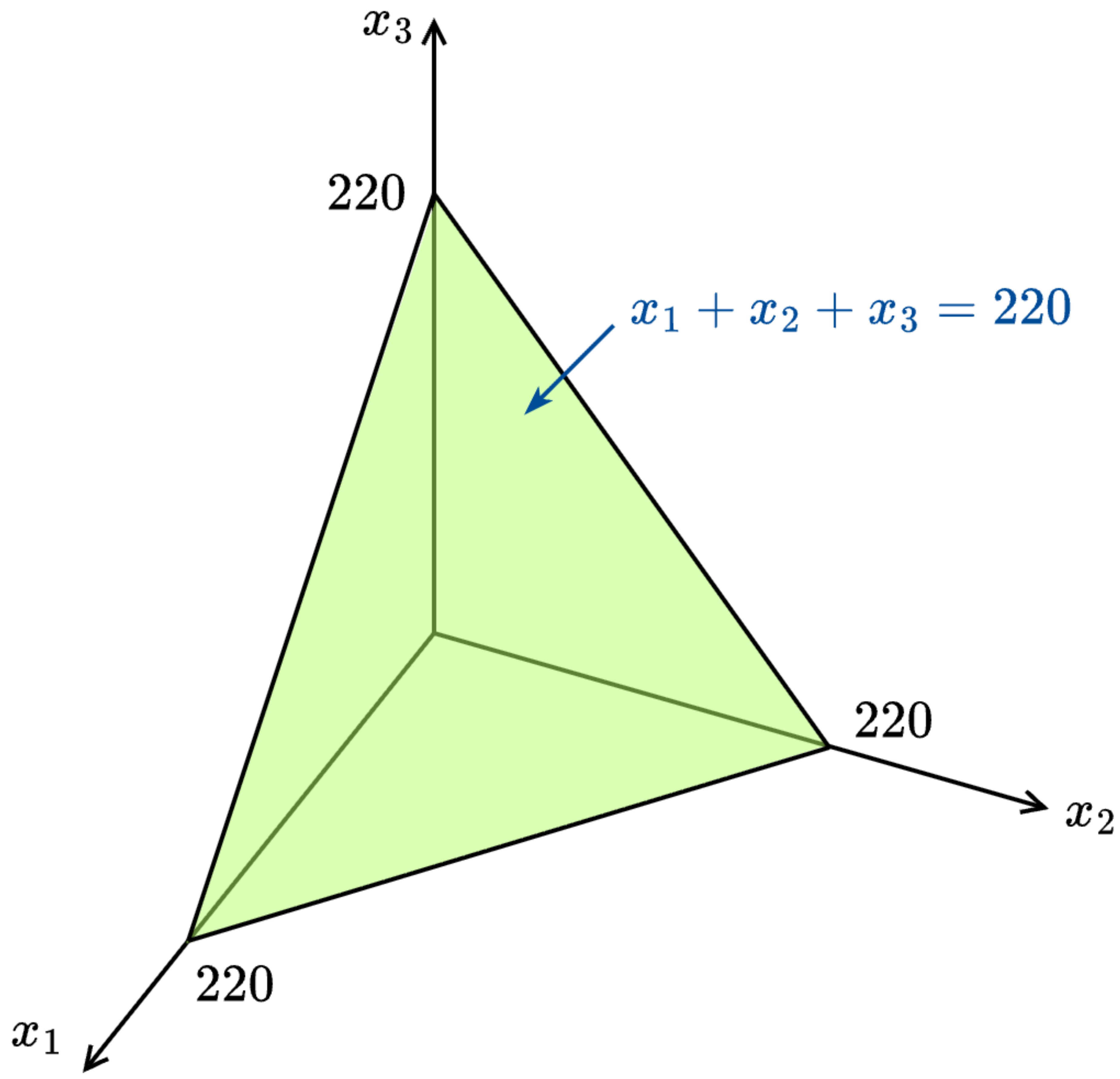
以三城博弈为例

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

- 个体理性条件将平面缩小为右图中的三角型领域。



$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

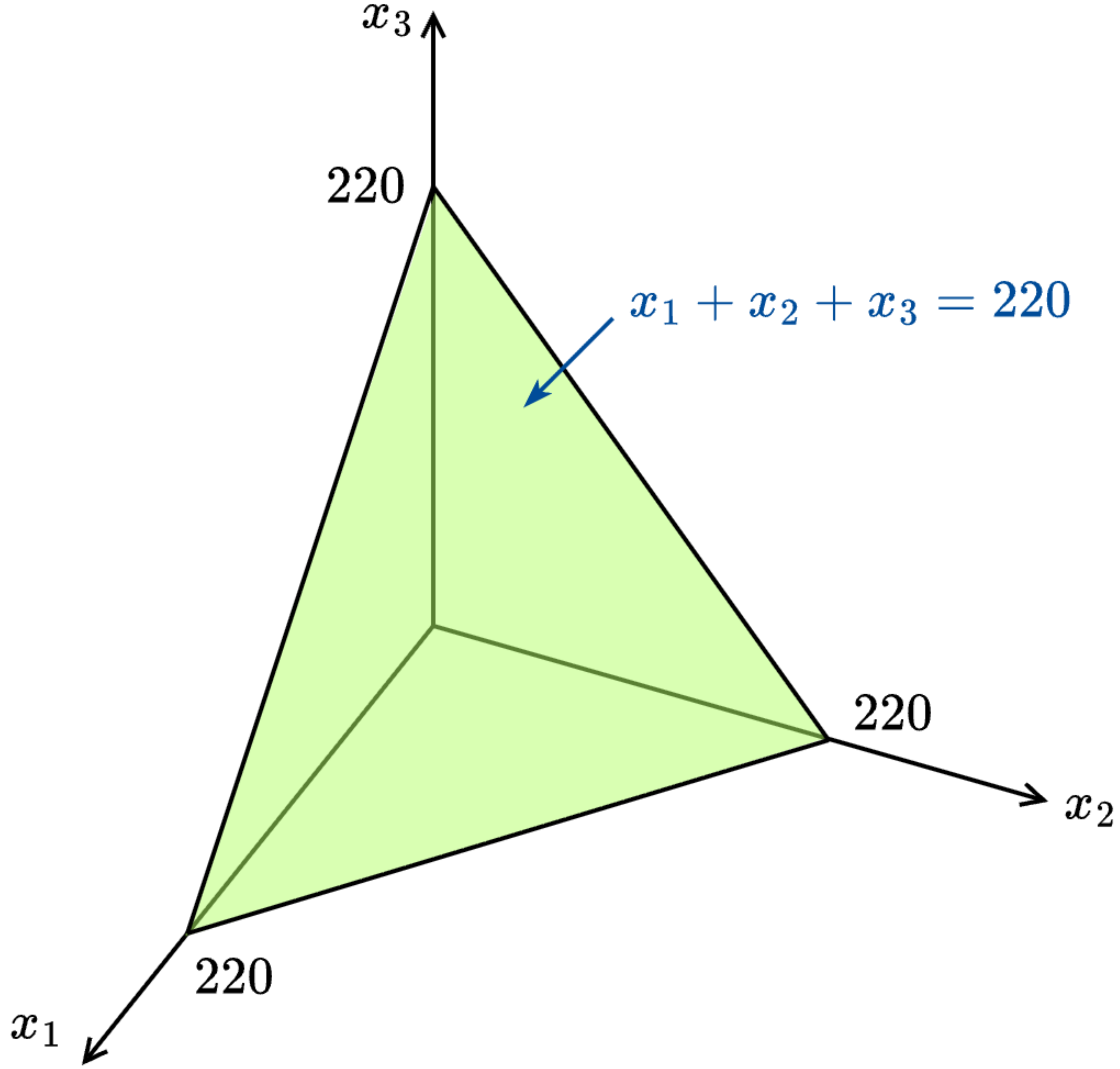


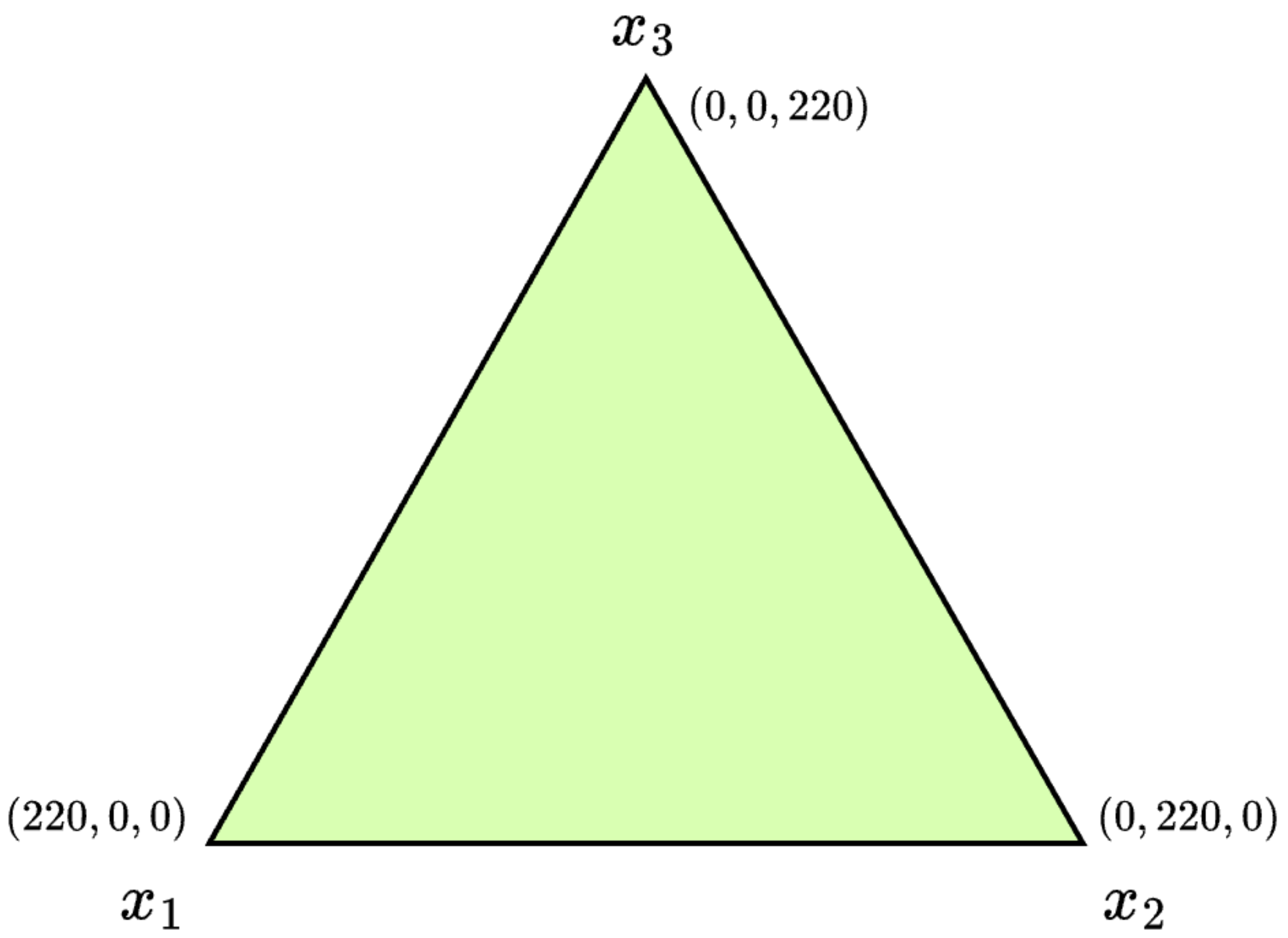
核的代数与几何表达

以三城博弈为例

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

- 有效性条件中的总收益 $v(N)$ 只决定平面和原点的距离，不会改变形状。



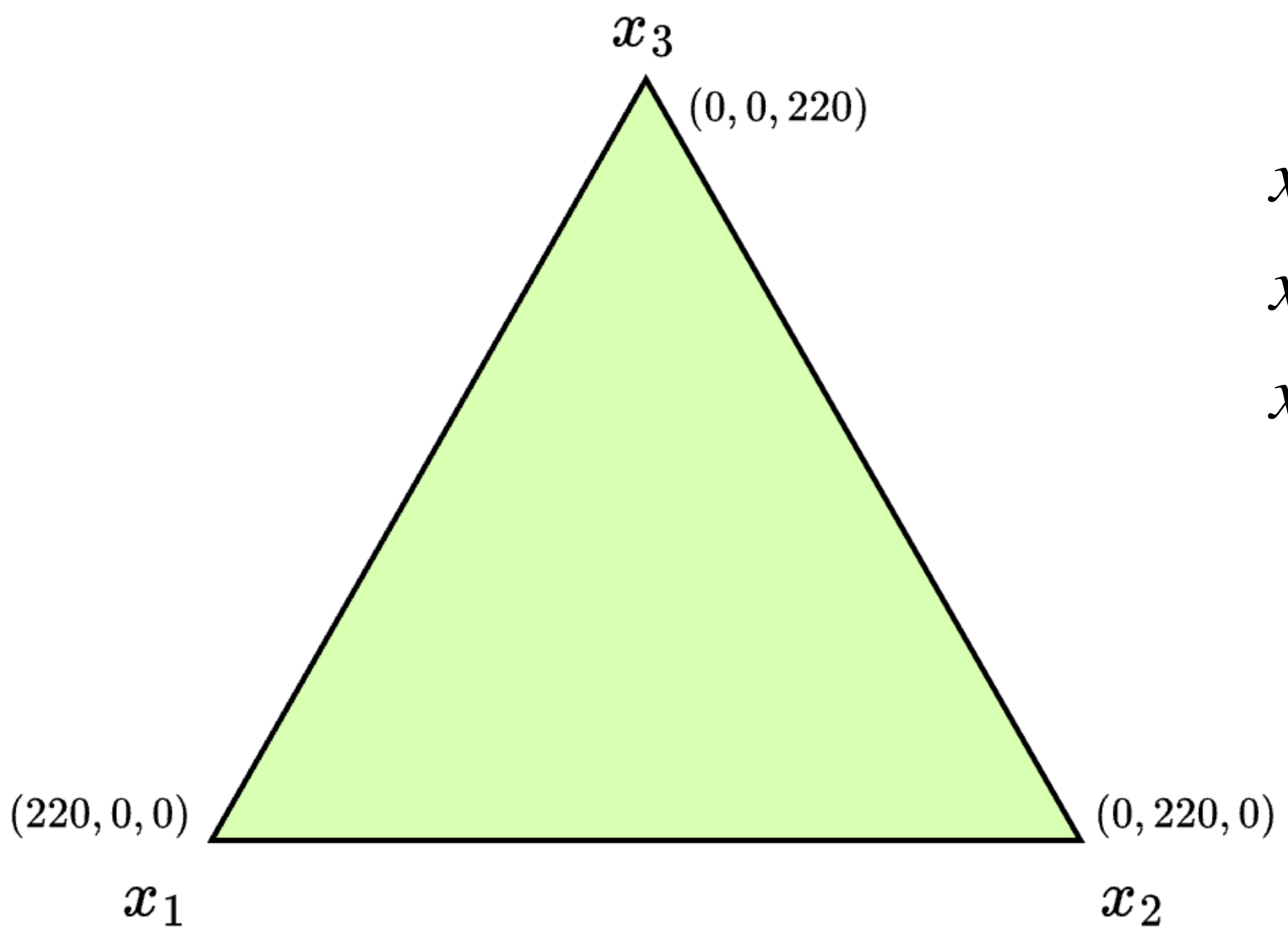


核的代数与几何表达

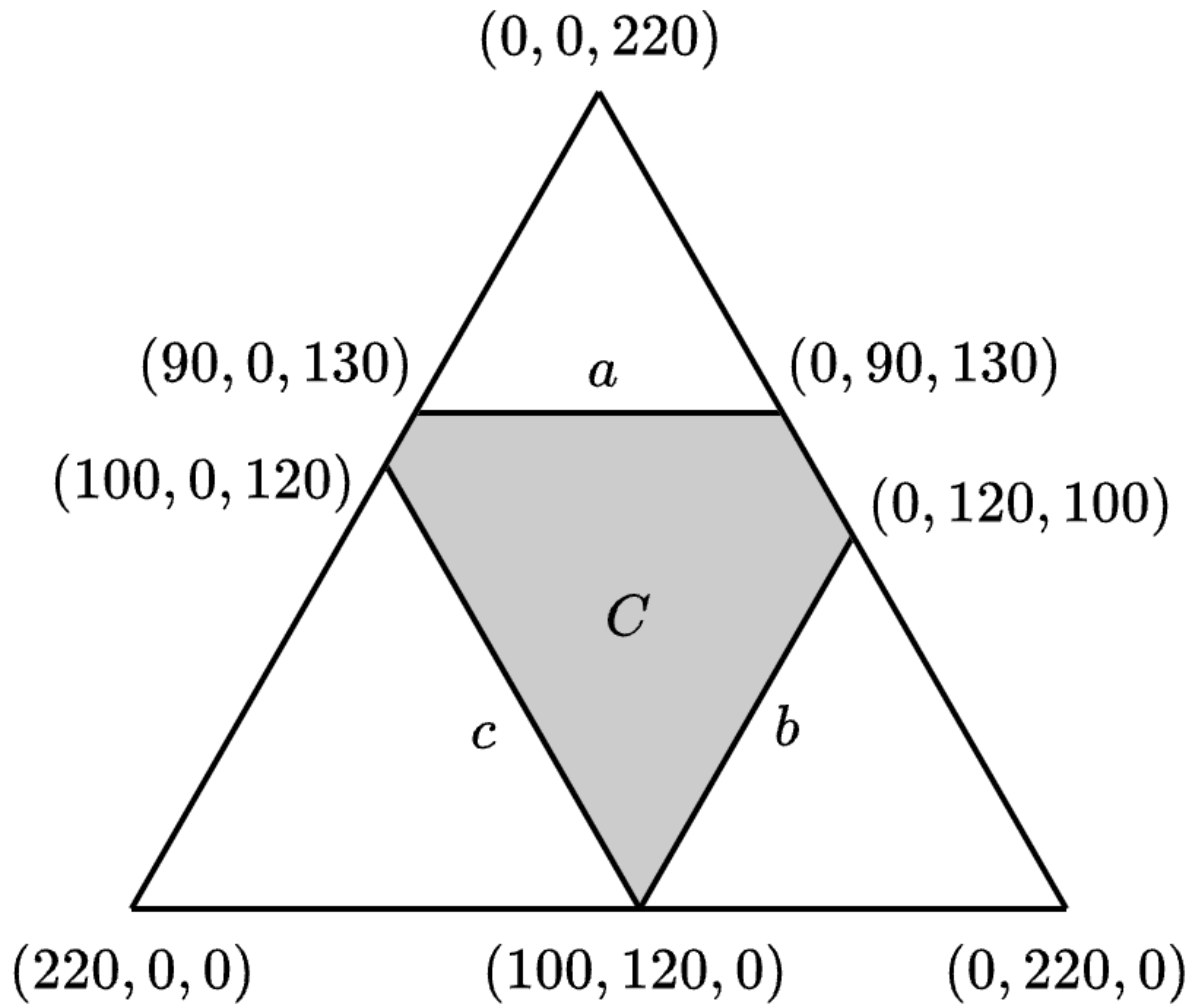
以三城博弈为例

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

- 每个联盟理性条件都是一个不等式 $x_i + x_j \geq s \Leftrightarrow x_k \leq t$，这在平面中对应一条直线和由它分割出的半个平面。



$$x_1 + x_2 \geq 90 \qquad (a)$$
$$x_2 + x_3 \geq 100 \qquad (b)$$
$$x_2 + x_3 \geq 120 \qquad (c)$$



利用绘图法计算排列博弈的核

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	2	5	4	14	18	9	24

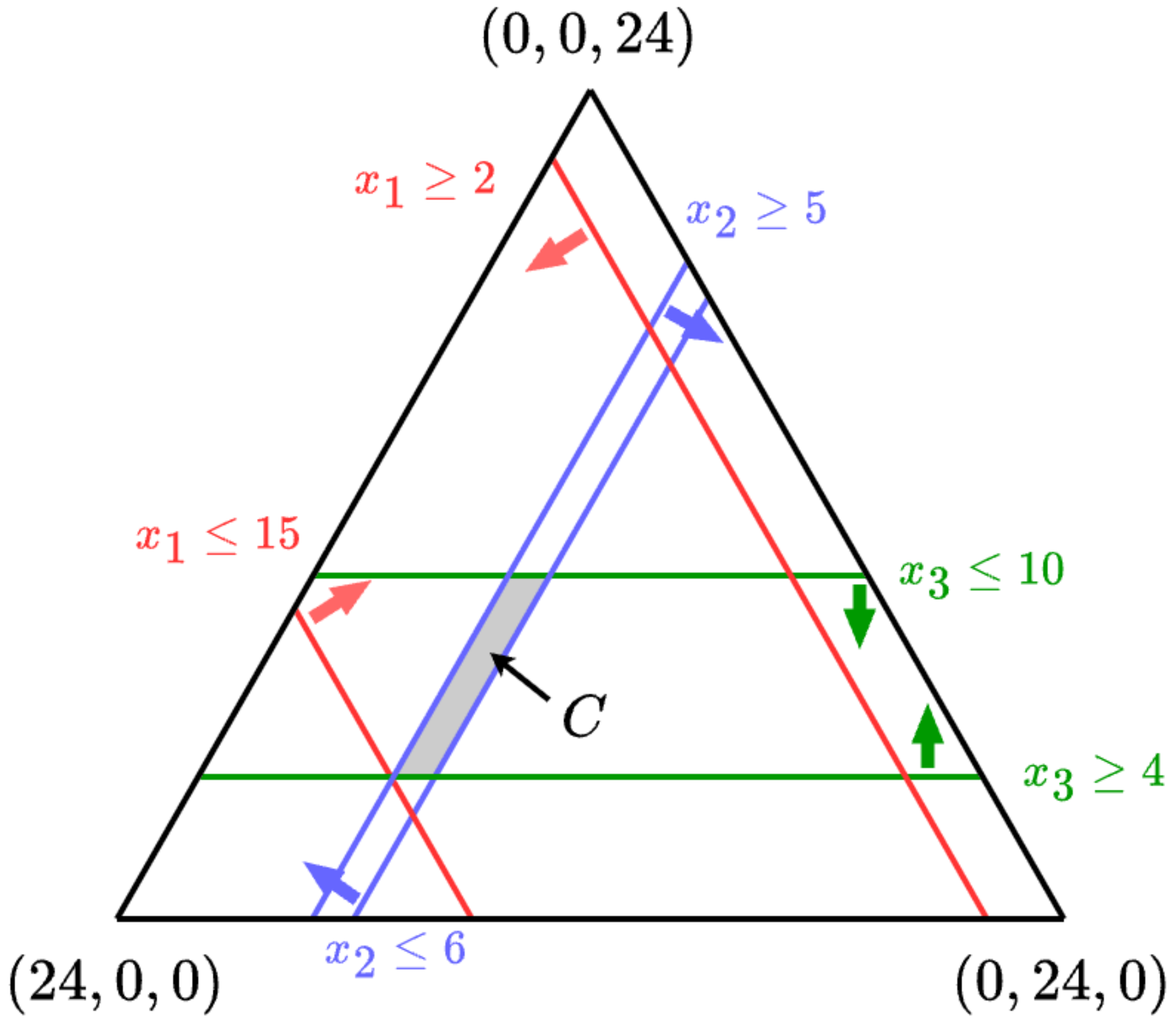
个体理性：

$$x_1 \geq 2, \quad x_2 \geq 5, \quad x_3 \geq 4$$

联盟理性：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \geq 14 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_3 \geq 18 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 \leq 6 \\ x_2 + x_3 \geq 9 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 \leq 15 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad C = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 5 \leq x_2 \leq 6,\ 4 \leq x_3 \leq 10,\ x_1 = 24 - x_2 - x_3\}$$



核分配可能是唯一的

手套博弈

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1

由联盟理性条件和有效性条件可得

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\
x_2 + x_3 \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 1
\end{aligned}
$$

因此，核是 $\{(0, 0, 1)\}$。

多人博弈的核

投票博弈：$N = \{1,\ldots,15\}$,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } \{1,\ldots,5\} \subseteq S \text{ and } |S| \geq 9 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

由联盟理性条件和有效性条件可得：

$$(\sum_{i=1}^{5} x_i) + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_{10} = x_{11} = \ldots = x_{15} = 0$$

$$(\sum_{i=1}^{5} x_i) + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x_6 = x_7 = \ldots = x_{11} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 1, \quad x_6 = \ldots = x_{15} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \left\{(x_1, \ldots, x_5, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{15} \mid \sum_{i=1}^{5} x_i = 1\right\}$$

核也可以是空集

多数通过博弈是一种简单的投票博弈，当参与人的人数为 n 时，任意人数大于 $n/2$ 的联盟都是胜利联盟，其他所有联盟都是失败联盟。

当 $n=3$ 时，

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	1	1	1	1

由联盟理性条件和有效性条件可得

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \\
x_1 + x_3 \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\
x_2 + x_3 \geq 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 0
\end{aligned}
$$

这和有效性条件 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ 矛盾。因此这个博弈的核是空集，即 $C = \emptyset$ 。

练习

在下面的博弈中，每个二人联盟产生的价值都是 θ，$0 < \theta < 1$。

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	θ	θ	θ	1

已知存在一个实数 $0 \le \theta^* \le 1$，当 $\theta < \theta^*$ 时，核包含无限多个收益分配；当 $\theta = \theta^*$ 时，核仅包含一个收益分配；当 $\theta > \theta^*$ 时，核为空集。求 θ^*。

练习：核分配看上去不太合理的例子

下面的博弈是在多数通过博弈的基础上增加了参与人 4。他的加入使全体联盟的价值由 1 增加至 $3/2$，但对其他联盟没有影响。

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1	1
S	{4}	{1, 4}	{2, 4}	{3, 4}	{1, 2, 4}	{1, 3, 4}	{2, 3, 4}	N
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1	3/2

求此博弈的核。