博弈论

第七讲：合作博弈（二）

黄嘉平
深圳大学中国经济特区研究中心

办公地点： 粤海校区汇文楼 1510
丽湖校区守正楼 A 座 3 楼公共办公室

电子邮箱： huangjp@szu

课程主页： https://huangjp.com/GT/

Shapley 值

核的缺点、纳什均衡的优点、单值解的必要性

- 核作为合作博弈的解，其最大的缺点是无法保证它的存在。
- 纳什均衡的优点是，在有限非合作博弈中永远存在混合策略纳什均衡。
- 核和纳什均衡的共同缺点是，有时候它们都是很大的集合。

我们非常需要一个既能保证**存在性**、又能保证**唯一性**的合作博弈解，简称单值解。例如

- **Shapley 值**（由 Lloyd Shapley 于 1953 年提出）
- Nucleolus（核仁，发音时重音在 o）

2012年诺贝尔经济学奖得主
Lloyd S. Shapley (1923-2016)

边际贡献

定义 Shapley 值需要用到**边际贡献（marginal contribution）**的概念。

在 TU-game (N, v) 中，参与人 i 加入联盟 S （$i \notin S$）时给 S 创造的边际贡献是

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

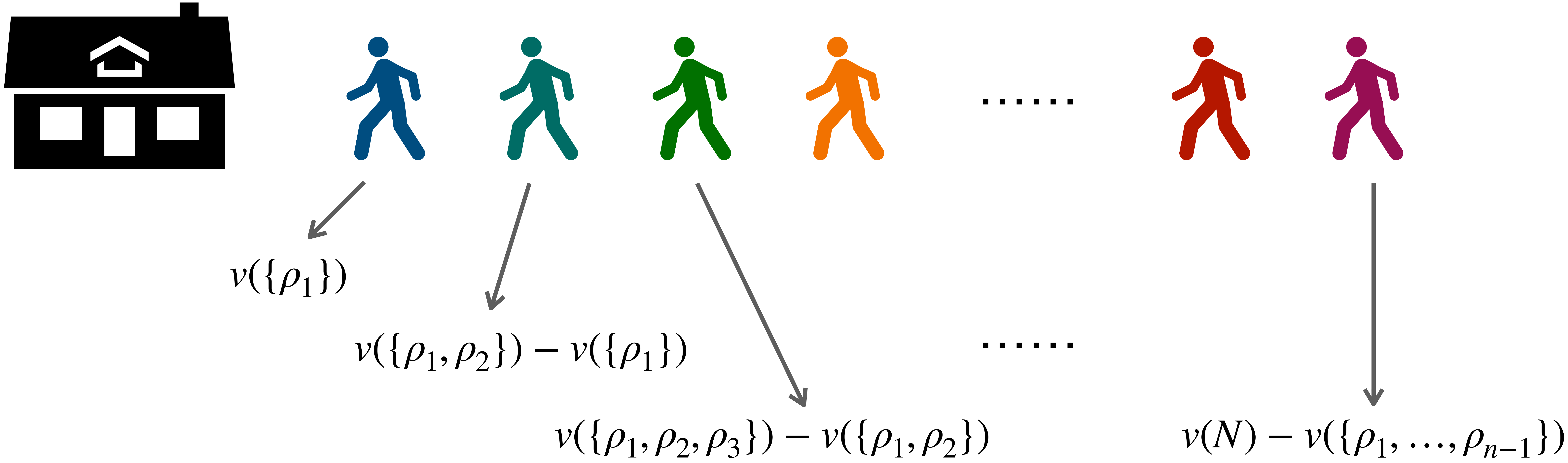
以三城博弈为例：

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

参与人 1 给联盟 $\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}$ 创造的边际贡献分别是 $0, 90, 100, 100$。

边际向量

我们的目的是将全体联盟创造的价值分配给它的成员。这时我们需要考虑全体联盟可以以怎样的顺序形成。每一种成员的排列方式都对应一个边际贡献的向量，称为**边际向量（marginal vector）**。



边际向量的成分之和一定等于 $v(N)$。

Shapley 值

三城博弈

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

Shapley 值是所有边际向量的平均值。以三城博弈为例，三个参与人一共可以形成 6 个不同的排列，它们对应的边际向量如下表所示：

排列	参与人 1 的边际贡献	参与人 2 的边际贡献	参与人 3 的边际贡献
1, 2, 3	0	90	130
1, 3, 2	0	120	100
2, 1, 3	90	0	130
2, 3, 1	100	0	120
3, 1, 2	100	120	0
3, 2, 1	100	120	0
边际贡献之和	390	450	480
Shapley 值	**65**	**75**	**80**

多数通过博弈的 Shapley 值

已知多数通过博弈的核是空集。
它的 Shapley 值是 $(1/3, 1/3, 1/3)$。

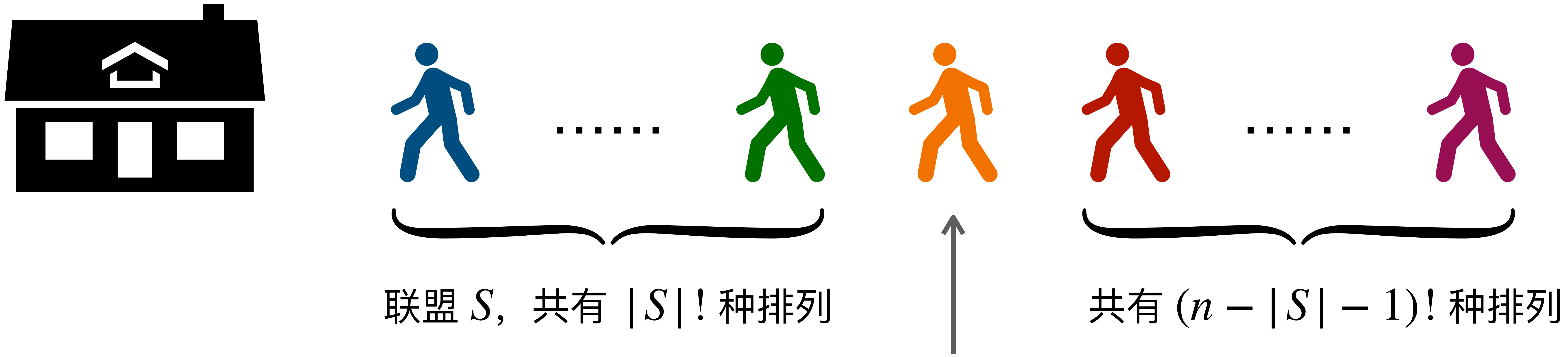
S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	1	1	1	1

排列	参与人 1 的边际贡献	参与人 2 的边际贡献	参与人 3 的边际贡献
1, 2, 3	0	1	0
1, 3, 2	0	0	1
2, 1, 3	1	0	0
2, 3, 1	0	0	1
3, 1, 2	1	0	0
3, 2, 1	0	1	0
边际贡献之和	2	2	2
Shapley 值	**1/3**	**1/3**	**1/3**

Shapley 值的函数表达

当存在 n 个参与人时，一共有 $n!$ 种不同的排列方式。因此当人数较多时，列出所有边际向量显然是不现实的。例如联合国安理会的投票博弈中有 15 个参与人，排列的种类为 $15! > 1.3$ 万亿。

幸运的是，当我们关注参与人 i 的边际贡献时，他前面和后面的排列顺序并不重要



参与人 i 的边际贡献由 S 的成员决定，
和排列顺序无关。

Shapley 值的函数表达

参与人 i 对任意联盟 S 的边际贡献可以表达为 $|S|! \cdot (n-|S|-1)! \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]$

TU-game (N, v) 的 Shapley 值 $\Phi(N, v)$ 是一个收益分配，它的第 i 要素，即参与人 i 的 Shapley 值是

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n-|S|-1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]$$

利用函数表达式计算 Shapley 值

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]$$

三城博弈：

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

计算参与人 1 的 Shapley 值

$$\varnothing \to \frac{0!(3-1)!}{3!} \cdot (0-0) = 0 \qquad \{2\} \to \frac{1! \cdot (3-2)!}{3!} \cdot (90-0) = 15$$

$$\{3\} \to \frac{1! \cdot (3-2)!}{3!} \cdot (100-0) = 50/3 \qquad \{2,3\} \to \frac{2! \cdot (3-3)!}{3!} \cdot (220-120) = 100/3$$

因此，$\Phi_1 = 0 + 15 + 50/3 + 100/3 = 65$。　用同样方法可以计算 Φ_2 和 Φ_3。

利用函数表达式计算 Shapley 值

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]$$

联合国安理会投票博弈：

$$N = \{1, \ldots, 15\}, \quad v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } \{1,\ldots,5\} \subseteq S \text{ and } |S| \geq 9 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 任意参与人的边际贡献只可能是 1 或 0。
- 当 $i \notin \{1,\ldots,5\}$ 时，其边际贡献为 1 的联盟需包含所有五个常任理事国和任意其他三个非常任理事国，因此

$$\Phi_i = \binom{9}{3} \frac{8!6!}{15!} = \frac{9!}{3!6!} \frac{8!6!}{15!} = \frac{9!}{3!} \frac{8!}{15!} \approx 0.0018648$$

- 当 $i \in \{1,\ldots,5\}$ 时，其边际贡献为 1 的联盟需包含其他四个常任理事国和至少四个非常任理事国，因此

$$\Phi_i = \sum_{k=4}^{10} \binom{10}{k} \frac{(4+k)!(10-k)!}{15!} = \sum_{k=4}^{10} \frac{10!}{k!(10-k)!} \frac{(4+k)!(10-k)!}{15!} = \sum_{k=4}^{10} \frac{10!}{k!} \frac{(4+k)!}{15!} \approx 0.19627$$

练习

计算排列博弈（牙医博弈）的 Shapley 值

S	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$v(S)$	2	5	4	14	18	9	24

可以列出所有边际向量然后求平均值，也可以利用函数表达计算。

公理化方法

Shapley 值的性质

- **有效性（efficiency）**： $\sum_{i \in N} \Phi_i(N, v) = v(N)$

  Proof：每个边际向量都满足有效性，因此 Shapley 值也满足有效性。

- **零贡献性（null-player property）**： 当参与人 i 对任意联盟 S 的边际贡献都为零时，我们称其为零贡献参与人（null-player）。在任意 TU-game 中，每个零贡献参与人的 Shapley 值都为零。

  Proof：根据 Shapley 值的函数表达，这是显而易见的。

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \underbrace{\left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right]}_{\text{这部分等于零}}$$

Shapley 值的性质

- **对称性（symmetry）**：如果参与人 i 和 j 对任意不包含它们的联盟的边际贡献都相等，即 $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(S \cup \{j\}) - v(S) \ \Leftrightarrow \ v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$，我们称他们为对称参与人（symmetric players）。<u>在任意 TU-game 中，对称参与人 i 和 j 的 Shapley 值相等</u>。

Proof：当参与人 i 和 j 对称时，

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(N, v) &= \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N:\, i,j \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[\underline{v(S \cup \{i\})} - v(S)\right] + \sum_{S \subseteq N:\, i,j \notin S} \frac{|S \cup \{j\}|! \cdot (n - |S \cup \{j\}| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{j\} \cup \{i\}) - \underline{v(S \cup \{j\})}\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N:\, i,j \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[\underline{v(S \cup \{j\})} - v(S)\right] + \sum_{S \subseteq N:\, i,j \notin S} \frac{|S \cup \{i\}|! \cdot (n - |S \cup \{i\}| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{j\} \cup \{i\}) - \underline{v(S \cup \{i\})}\right] \\
&= \sum_{S \subseteq N:\, j \notin S} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{j\}) - v(S)\right] = \Phi_j(N, v)
\end{aligned}
$$

Shapley 值的性质

- **加法性（additivity）**：给定博弈 (N, v) 和 (N, w) 时，博弈 $(N, v+w)$ 的特征函数定义为 $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$。（这里应将 $v+w$ 看作一个函数名）
  Shapley 值满足 $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$。

  Proof：

$$\Phi_i(N, v+w) = \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n-|S|-1)!}{n!} \cdot \left[(v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S)\right]$$

$$= \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n-|S|-1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) + w(S \cup \{i\}) - v(S) - w(S)\right]$$

$$= \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n-|S|-1)!}{n!} \cdot \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] + \sum_{S \subseteq N:\, i \notin S} \frac{|S|! \cdot (n-|S|-1)!}{n!} \cdot \left[w(S \cup \{i\}) - w(S)\right]$$

$$= \Phi_i(N, v) + \Phi_i(N, w)$$

Shapley 值的公理化

Shapley 值是同时满足有效性、零贡献性、对称性、加法性的**唯一**单值解。

- 我们可以理解为这四个性质在一起**定义了** Shapley 值。
- 用一系列性质定义一种概念的方法称为**公理化（axiomatization）**或**特征化（characterization）**，用来定义概念的这些性质则称为**公理（axiom）**，它们是我们希望拥有的特性，因此在名称上区别于 property。
- 公理化的优点包括：
  - 在有些时候，利用公理可以更容易地求得 Shapley 值。
  - 在向非专业人士介绍 Shapley 值时，公理往往比函数更容易理解。
  - 通过比较公理可以更容易地选择自己认为合适的解。

利用公理求 Shapley 值

联合国安理会投票博弈：

$$N = \{1,\ \ldots,15\},\quad v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } \{1,\ldots,5\} \subseteq S \text{ and } |S| \geq 9 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 任意参与人的边际贡献只可能是 1 或 0。
- 当 $i \notin \{1,\ldots,5\}$ 时，其边际贡献为 1 的联盟需包含所有五个常任理事国和任意其他三个非常任理事国，因此

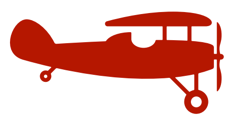
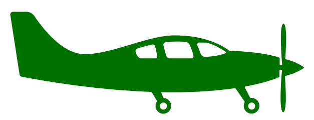
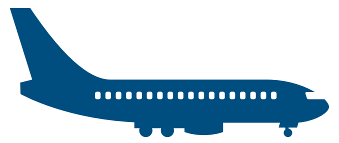
$$\Phi_i = \binom{9}{3}\frac{8!6!}{15!} = \frac{9!}{3!6!}\frac{8!6!}{15!} = \frac{9!}{3!}\frac{8!}{15!} \approx 0.0018648$$

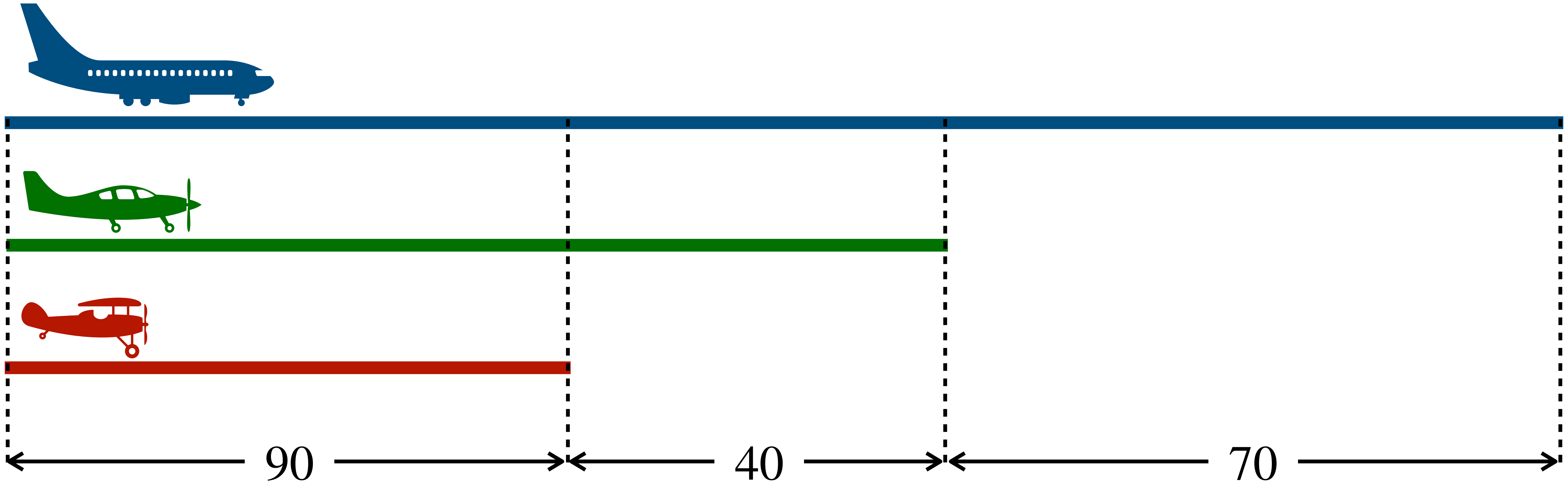
- 当 $i \in \{1,\ldots,5\}$ 时，他们都是对称的。<u>根据有效性和对称性</u>，可得

$$\Phi_i \approx \frac{1 - 10 \times 0.0018648}{5} \approx 0.19627$$

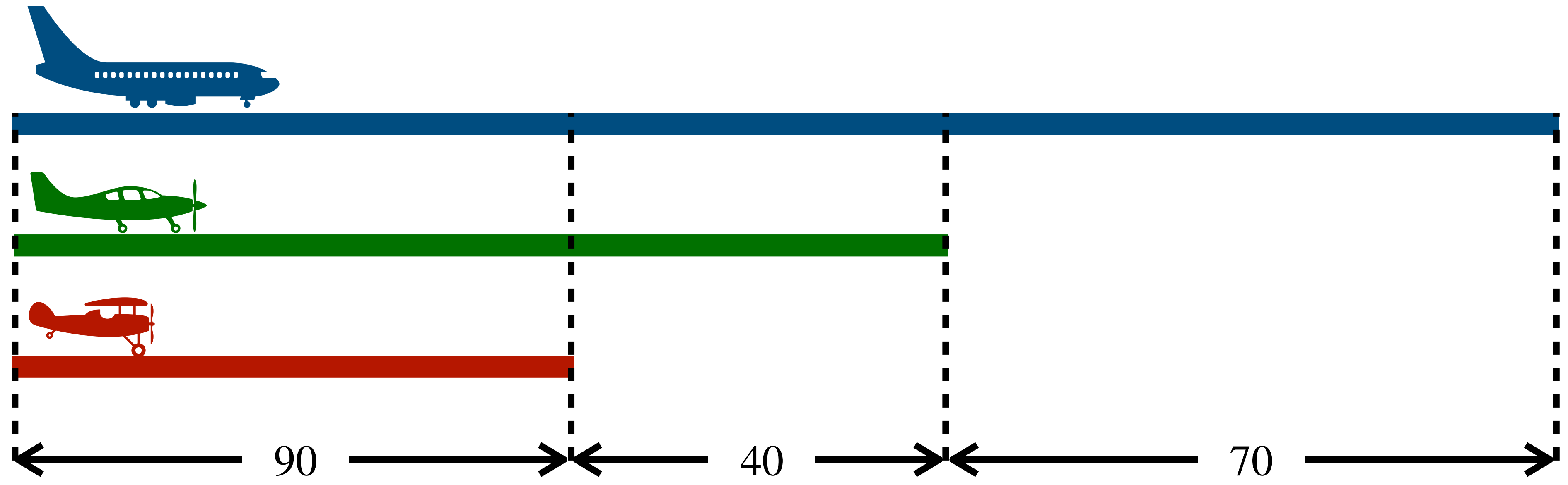
应用：如何分摊机场跑道的维护费？

机场跑道的费用分摊问题

- 机场跑道的维护费需要由使用跑道的航空公司分担。每个航空公司都拥有不同型号的飞机，而每种型号的飞机使用的跑道长度不同。那么什么样的分摊方法是合理的呢?
- 下面展示了一种非常简单的跑道使用情况。假设有三家航空公司 A, B, C 在使用同一条跑道，A 航拥有一架小型飞机  ，B 航拥有一架中型飞机  ，C 航拥有一架大型飞机  。三种飞机使用的跑道长度以及每段跑道的维护费如下图所示。



机场博弈



- 用合作博弈模型描述的机场跑道费用分摊问题在文献中称为**机场博弈（airport game）**，是一种成本分摊博弈（cost sharing game）。和之前讨论的问题不同的是，成本分摊博弈的特征函数表达的不是联盟创造的价值，而是联盟需要共同支付的成本。在成本分摊博弈中，每个参与人都希望自己承担得部分更少，而不是更多。

- 令参与人 i 拥有的飞机所需的跑道维护费用为 C_i，则 Airport game 的特征函数可以表达为

$$v(S) = \max_{i \in S} C_i$$

- 此博弈的 Shapley 值具有特殊性质：当参与人的名字满足 $0 \equiv C_0 < C_1 < C_2 < \ldots < C_n$ 时，$C_i - C_{i-1}$ 部分由参与人 $i, \ldots, n$ 平均分摊。换句话说，**每段跑道的维护费都由实际使用它的航空公司平均分摊**。

  因此，参与人 i 的 Shapley 值是 $\frac{1}{n}C_1 + \frac{1}{n-1}(C_2 - C_1) + \ldots + \frac{1}{n-i+1}(C_i - C_{i-1})$。

- 在我们的例子中，$C_A = 90$，$C_B = 90 + 40 = 130$，$C_C = 90 + 40 + 70 = 200$。Shapley 值是

$$(\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C) = \left(\frac{1}{3}90,\ \frac{1}{3}90 + \frac{1}{2}40,\ \frac{1}{3}90 + \frac{1}{2}40 + 70\right) = (30, 50, 120)$$

机场博弈

Shapley 值的推导

假设机场博弈的参与人集合为 $N = \{1, \ldots, n\}$，且满足 $0 \equiv C_0 < C_1 < \ldots < C_n$。

令 $R_k = \{k, k+1, \ldots, n\}, k = 1, \ldots, n$，并定义新博弈

$$v_k(S) = \begin{cases} C_k - C_{k-1} & \text{if } S \cap R_k \neq \emptyset \\ 0 & \text{if } S \cap R_k = \emptyset \end{cases}$$

R_k 可以理解为使用第 k 段跑道的参与人集合，而 v_k 则定义了第 k 段跑道维修费的分摊问题，即当联盟 S 不包含 R_k 中的参与人时，S 就不需要分摊费用，否则它需要参与费用 $C_k - C_{k-1}$ 的分摊。

在博弈 (N, v_k) 中，参与人 $1, \ldots, k-1$ 是零贡献参与人，而参与人 $k, \ldots, n$ 都是对称的，根据有效性、零贡献性和对称性，(N, v_k) 的 Shapley 值是

$$\Phi_i(N, v_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-k+1}(C_k - C_{k-1}) & \text{if } i \in R_k \\ 0 & \text{if } i \notin R_k \end{cases}$$

机场博弈

Shapley 值的推导

例如当 $S = \{2,5\}$ 时，S 和 $R_6, \ldots, R_n$ 的交集为空。

对任意联盟 S，下列关系式成立

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(S) = \sum_{i=1}^{\max(S)} (C_i - C_{i-1}) = C_{\max(S)} = \max_{i \in S} C_i$$

因此，$v = \sum_{k=1}^{n} v_k$。根据加法性，(N, v) 的 Shapley 值是

$i \in R_1, \ldots, R_i$

$$\Phi_i(N, v) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_i(N, v_k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{n-k+1}(C_k - C_{k-1})$$

$$= \Phi_{i-1}(N, v) + \frac{1}{n-i+1}(C_i - C_{i-1})$$

$$\Phi_i(N, v_k) = \begin{cases} \frac{1}{n-k+1}(C_k - C_{k-1}) & \text{if } i \in R_k \\ 0 & \text{if } i \notin R_k \end{cases}$$