

课后练习

在 *Moves* (一本关于模拟战争游戏和策略的杂志, 1972, No. 6) 中, William Drakert 讨论了二战中的诺曼底登陆战役里盟军和德军的策略及可能的结果。我们可以将其作为矩阵博弈进行分析。

- 盟军有六种进攻策略, 分别为 $a, b, \dots, f$
- 德军有六种防守策略, 分别为 $A, B, \dots, F$
- 盟军的收益矩阵为右侧所示

	A	B	C	D	E	F
a	13	29	8	12	16	23
b	18	22	21	22	29	31
c	18	22	31	31	27	37
d	11	22	12	21	21	26
e	18	16	19	14	19	28
f	23	22	19	23	30	34

利用反复剔除严格劣势策略找出博弈的值和双方的最优策略。

课后练习参考答案

	A	B	C	D	E	F	
a	13	29	8	12	16	23	④
b	18	22	21	22	29	31	
c	18	22	31	31	27	37	②
d	11	22	12	21	21	26	
e	18	16	19	14	19	28	
f	23	22	19	23	30	34	③
					①		

- 策略 E 和 F 分别严格劣于策略 A 。
- 在剔除 E, F 后，策略 d 严格劣于 $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ ，策略 e 严格劣于 $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}f$ 。
- 在继续剔除 d, e 后，策略 D 严格劣于 $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ ，策略 B 严格劣于 $\frac{37}{52}A + \frac{15}{52}C$ 。
 - 如何找到后者？针对策略 a 和 b ， B 劣于任意混合策略 $\alpha A + (1 - \alpha)C$ 。针对策略 c ， B 成为严格劣势策略的条件是 $22 > 18\alpha + 31(1 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha > \frac{9}{13} = \frac{36}{52}$ 。针对策略 f ， B 成为严格劣势策略的条件是 $22 > 23\alpha + 19(1 - \alpha) \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{4} = \frac{39}{52}$ 。因此，任何满足 $\frac{36}{52} < \alpha < \frac{39}{52}$ 的混合策略 $\alpha A + (1 - \alpha)C$ 都严格优于 B 。
- 在继续剔除 B, D 后， a 严格劣于 c ， b 严格劣于 $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}f$ 。
- 在继续剔除 a, c 后，博弈矩阵简化为右侧的 2×2 矩阵。解其可得：盟军的最优策略为 $(p_c, p_f) = (\frac{4}{17}, \frac{13}{17})$ ，德军的最优策略为 $(q_A, q_C) = (\frac{12}{17}, \frac{5}{17})$ ，博弈值为 $\frac{371}{17}$ 。

	A	C
c	18	31
f	23	19