时间序列分析与预测

第三讲

黄嘉平

深圳大学｜中国经济特区研究中心
粤海校区汇文楼办公楼 1510
课程网站 https://huangjp.com/TSAF/

1. 时间序列数据

1.1. tsibble 数据

在调用 `fpp3` 时，你会发现四个不属于 `tidyverse` 的工具包：`tsibble`, `tsibbledata`, `feasts`, `fable`。事实上，这四个工具包是 `tidyverts` 工具集的核心 (https://tidyverts.org)。

- `tsibble`: temporal data frames and tools
- `tsibbledata`: diverse datasets for tsibble
- `feasts`: features extraction and statistics
- `fable`: tidy forecasting

其中，`tsibble` 工具包提供了基于 tibble 的时间序列数据结构 tsibble，可以保存时间序列数据，并利用 `tidyverse` 中的其他函数进行数据整理。

1.1. tsibble 数据

考虑下面的时间序列数据：

Year	Observation
2015	123
2016	39
2017	78
2018	52
2019	110

下面我们将其保存为 tsibble 形式

```r
y <- tsibble(
  Year = 2015:2019,
  Observation = c(123, 39, 78, 52, 110),
  index = Year
)
y
```

```
# A tsibble: 5 x 2 [1Y]
   Year Observation
  <int>       <dbl>
1  2015         123
2  2016          39
3  2017          78
4  2018          52
5  2019         110
```

1.1. tsibble 数据

tsibble 数据比 tibble 数据多了两个参数，分别是 key 和 index，它们都是用来记录时间序列信息的。

在前面的例子中，我们将 Year 变量设置为 index（`index = Year`），也就是指定了时间信息是保存在 Year 中的。此时，Year 承担了横截面数据中序号的作用，用来排列观测值的顺序。

我们还注意到，观测值的时间间隔也被保存在 tsibble 数据里

```
# A tsibble: 5 x 2 [1Y]
```

`tsibble()` 或 `as_tsibble()` 函数可以通过被指定为 index 的变量内容识别时间间隔，但需要提供正确的时间格式（见下页）。

1.1. tsibble 数据

假设我们有下面的 tibble 数据 `z`

```
z           # 该如何生成 z?
```

```
# A tibble: 5 × 2
  Month    Observation
  <chr>          <dbl>
1 2019 Jan          50
2 2019 Feb          23
3 2019 Mar          34
4 2019 Apr          30
5 2019 May          25
```

这里 Month 变量是以字符串形式保存的，无法被识别为时间信息。因此我们需要将它转换为适当的时间格式。

转换时间数据的函数包括 `yearquarter()`, `yearmonth()`, `yearweek()`, `as_date()`, `as_datatime()` 等。

```
z |> mutate(
    Month = yearmonth(Month)
  ) |> as_tsibble(index = Month)
```

```
# A tsibble: 5 x 2 [1M]
     Month Observation
     <mth>       <dbl>
1 2019 Jan          50
2 2019 Feb          23
3 2019 Mar          34
4 2019 Apr          30
5 2019 May          25
```

1.1. tsibble 数据

如果每个时间点上都有多个观测对象（例如各省的年度 GDP），我们也可以将它们都保存在一个 tsibble 数据里。这时候我们就需要用到 key 参数来排列观测对象。

`tsibbledata` 中提供的 `olympic_running` 数据集记录了每届奥运会（四年一度，缺少 1916、1940 和 1944 年）中跑步项目的最短用时数据。由于存在多种跑步项目，该数据集用 Length 和 Sex 的组合作为 key。

olympic_running

```
# A tsibble: 312 x 4 [4Y]
# Key:       Length, Sex [14]
    Year Length Sex    Time
   <int>  <int> <chr> <dbl>
 1  1896    100 men    12
 2  1900    100 men    11
 3  1904    100 men    11
 4  1908    100 men    10.8
 5  1912    100 men    10.8
 6  1916    100 men    NA
 7  1920    100 men    10.8
 8  1924    100 men    10.6
 9  1928    100 men    10.8
10  1932    100 men    10.3
# ℹ 302 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

1.2. 对 tsibble 数据进行处理

下面我们对 `olympic_running` 数据进行整理。首先选出所有男子项目的成绩：

```
olympic_running |> filter(Sex == "men")
```

```
# A tsibble: 208 x 4 [4Y]
# Key:       Length, Sex [7]
    Year Length Sex    Time
   <int>  <int> <chr> <dbl>
 1  1896    100 men    12
 2  1900    100 men    11
 3  1904    100 men    11
 4  1908    100 men    10.8
 5  1912    100 men    10.8
 6  1916    100 men    NA
 7  1920    100 men    10.8
 8  1924    100 men    10.6
 9  1928    100 men    10.8
10  1932    100 men    10.3
# ℹ 198 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

1.2. 对 tsibble 数据进行处理

此时 Sex 列就失去了意义，因此我们只保留其他三列：

```
olympic_running |> filter(Sex == "men") |> select(-Sex)
```

```
# A tsibble: 208 x 3 [4Y]
# Key:       Length [7]
    Year Length  Time
   <int>  <int> <dbl>
 1  1896    100  12
 2  1900    100  11
 3  1904    100  11
 4  1908    100  10.8
 5  1912    100  10.8
 6  1916    100  NA
 7  1920    100  10.8
 8  1924    100  10.6
 9  1928    100  10.8
10  1932    100  10.3
# ℹ 198 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

1.2. 对 tsibble 数据进行处理

新增一列平均速度 aveSpeed = Length / Time，然后选取 1992 年以后历届奥运会 400 米项目的结果：

```
olympic_running |> filter(Sex == "men") |> select(-Sex) |>
  mutate(aveSpeed = Length/Time) |>
  filter(Year >= 1992 & Length == 400)
```

```
# A tsibble: 7 x 4 [4Y]
# Key:       Length [1]
   Year Length  Time aveSpeed
  <int>  <int> <dbl>    <dbl>
1  1992    400  43.5     9.20
2  1996    400  43.5     9.20
3  2000    400  43.8     9.12
4  2004    400  44       9.09
5  2008    400  43.8     9.14
6  2012    400  43.9     9.10
7  2016    400  43.0     9.30
```

1.2. 对 tsibble 数据进行处理

我们也可以将 `olympic_running` 中的 Length 的取值看作变量，也就是把每个竞技项目的数据单独放在一列中：

```
olympic_running |> pivot_wider(names_from = Length, values_from = Time)
```

```
# A tsibble: 54 x 9 [4Y]
# Key:       Sex [2]
    Year Sex   `100` `200` `400` `800` `1500` `5000` `10000`
   <int> <chr> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>  <dbl>  <dbl>   <dbl>
 1  1896 men    12    NA    54.2  131    273.    NA      NA
 2  1900 men    11    22.2  49.4  121.   246.    NA      NA
 3  1904 men    11    21.6  49.2  116    245.    NA      NA
 4  1908 men    10.8  22.6  50    113.   243.    NA      NA
 5  1912 men    10.8  21.7  48.2  112.   237.   877.   1881.
 6  1916 men    NA    NA    NA      NA     NA     NA      NA
 7  1920 men    10.8  22    49.6  113.   242.   896.   1906.
 8  1924 men    10.6  21.6  47.6  112.   234.   871.   1823.
 9  1928 men    10.8  21.8  47.8  112.   233.   878    1819.
10  1932 men    10.3  21.2  46.2  110.   231.   870    1811.
# ℹ 44 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

1.3. 导入外部数据

真实世界中的数据存在于数据库、csv 文件或者 excel 文件中，我们需要把它们导入 R 后，再转换为 tsibble 形式。

例如，https://OTexts.com/fpp3/extrafiles/prison_population.csv 提供了澳大利亚监狱收监人数的季度数据。

Date	State	Gender	Legal	Indigenous	Count
2005-03-01	ACT	Female	Remanded	ATSI	0
2005-03-01	ACT	Female	Remanded	Non-ATSI	2
2005-03-01	ACT	Female	Sentenced	ATSI	0
2005-03-01	ACT	Female	Sentenced	Non-ATSI	5
2005-03-01	ACT	Male	Remanded	ATSI	7
2005-03-01	ACT	Male	Remanded	Non-ATSI	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1.3. 导入外部数据

`tidyverse` 包含的 `readr` 工具包中提供了导入或识别数据的函数。我们可以用 `read_csv()` 函数直接从网上将数据导入 R。

```
prison <- readr::read_csv("https://OTexts.com/fpp3/extrafiles/prison_
population.csv")
```

```
Rows: 3072 Columns: 6
── Column specification ────────────────────────────────────────────────
Delimiter: ","
chr  (4): State, Gender, Legal, Indigenous
dbl  (1): Count
date (1): Date

Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.
Specify the column types or set `show_col_types = FALSE` to quiet this message.
```

1.3. 导入外部数据

```
prison
```

```
# A tibble: 3,072 × 6
   Date       State Gender Legal     Indigenous Count
   <date>     <chr> <chr>  <chr>     <chr>      <dbl>
 1 2005-03-01 ACT   Female Remanded  ATSI           0
 2 2005-03-01 ACT   Female Remanded  Non-ATSI       2
 3 2005-03-01 ACT   Female Sentenced ATSI           0
 4 2005-03-01 ACT   Female Sentenced Non-ATSI       5
 5 2005-03-01 ACT   Male   Remanded  ATSI           7
 6 2005-03-01 ACT   Male   Remanded  Non-ATSI      58
 7 2005-03-01 ACT   Male   Sentenced ATSI           5
 8 2005-03-01 ACT   Male   Sentenced Non-ATSI     101
 9 2005-03-01 NSW   Female Remanded  ATSI          51
10 2005-03-01 NSW   Female Remanded  Non-ATSI     131
# ℹ 3,062 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

由此可知，导入后的数据形式为 tibble，我们需要将其变更为 tsibble。

1.3. 导入外部数据

首先需要将保存为日度数据的 Date 更改为季度，然后指定 index 和 key。

```
prison |>
  mutate(Quarter = yearquarter(Date)) |>     # 将 Date 中的日期改为季度
  select(-Date) |>                           # 删除 Date 列
  as_tsibble(
    key = c(State, Gender, Legal, Indigenous),   # 指定 key
    index = Quarter                              # 指定 index
  ) -> prison       # 将以上结果重新代入 prison
```

注意最后一行用了向右代入符号 ->，这中写法并不常见，但放在连续几个 |> 后就显得非常自然了。

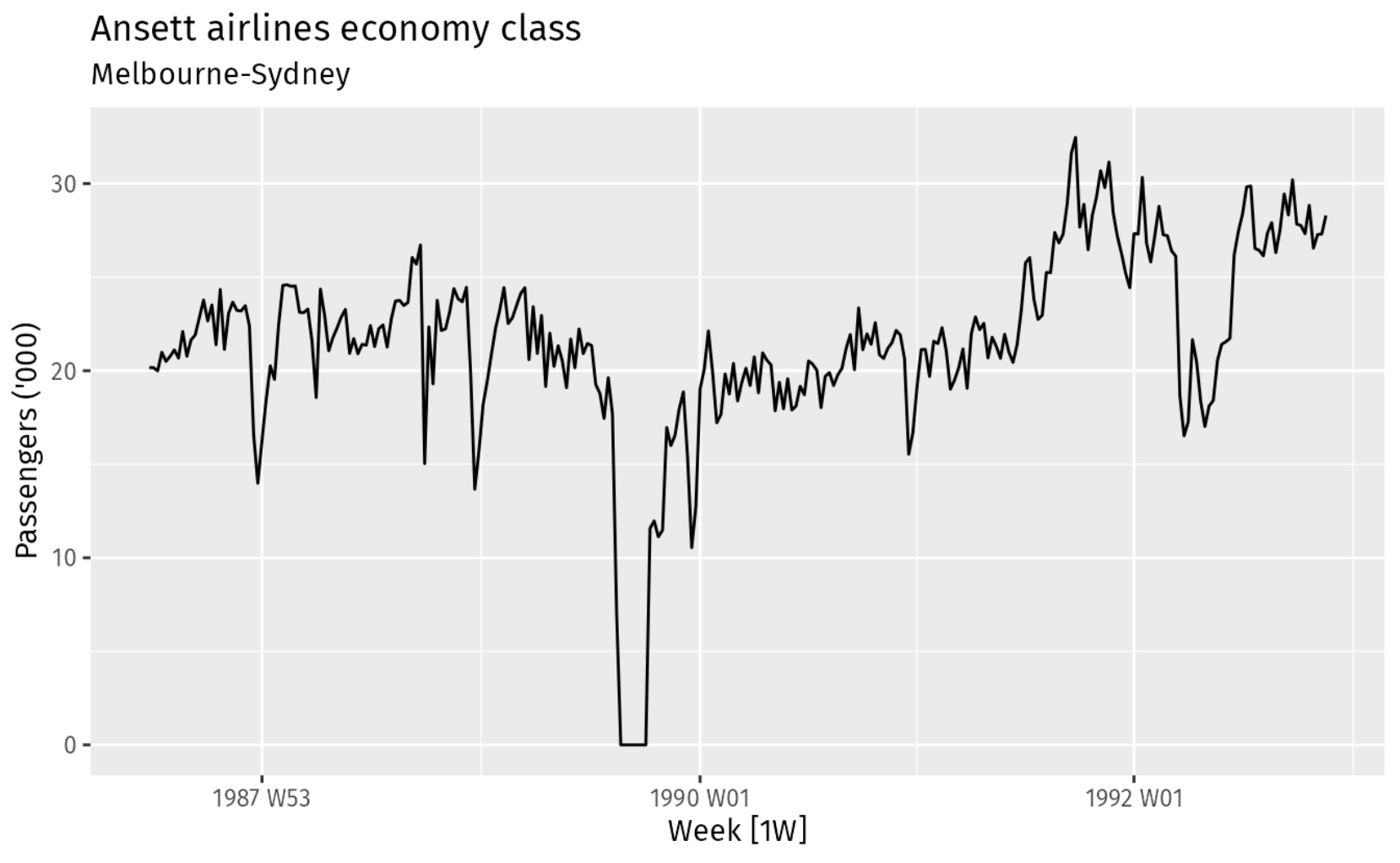
1.3. 导入外部数据

```
prison     # 显示转换为 tsibble 后的 prison 数据
```

```
# A tsibble: 3,072 x 6 [1Q]
# Key:       State, Gender, Legal, Indigenous [64]
   State Gender Legal    Indigenous Count Quarter
   <chr> <chr>  <chr>    <chr>      <dbl>   <qtr>
 1 ACT   Female Remanded ATSI           0 2005 Q1
 2 ACT   Female Remanded ATSI           1 2005 Q2
 3 ACT   Female Remanded ATSI           0 2005 Q3
 4 ACT   Female Remanded ATSI           0 2005 Q4
 5 ACT   Female Remanded ATSI           1 2006 Q1
 6 ACT   Female Remanded ATSI           1 2006 Q2
 7 ACT   Female Remanded ATSI           1 2006 Q3
 8 ACT   Female Remanded ATSI           0 2006 Q4
 9 ACT   Female Remanded ATSI           0 2007 Q1
10 ACT   Female Remanded ATSI           1 2007 Q2
# ℹ 3,062 more rows
# ℹ Use `print(n = ...)` to see more rows
```

2. 图形分析

2.1. 时序图（time plot）



2.1. 时序图（time plot）

我们用 `ggplot2` 提供的 `autoplot()` 命令画时序图。顾名思义，该函数可以根据输入的数据性质输出最合适的图表，如果是 tsibble 数据，则会输出时序图。

`autoplot()` 的基本语法是 `autoplot(Data, Measure)` ，它会自动将 index 作为横轴，将指定的 Measure 变量作为纵轴，并针对每个 key 值组合画一条折线图。如果不指定 Measure，它会自动选择第一个数值变量（非 index 和 key 变量）进行绘图。

2.1. 时序图（time plot）

`tsibbledata` 中包含的前澳洲安捷航空（Ansett Airlines）的周度旅客数量数据。1989 年，澳大利亚的民航飞行员曾发起抗议活动，这导致数据中存在 0 旅客记录。

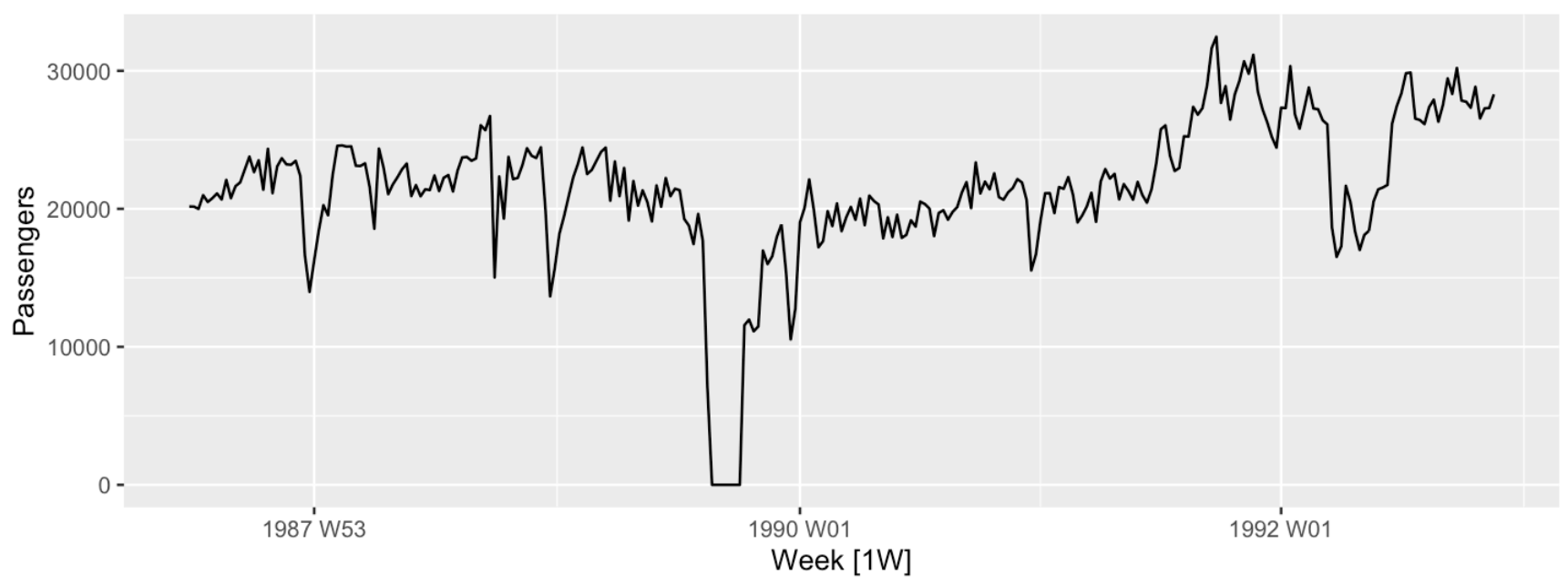
```
ansett
```

```
# A tsibble: 7,407 x 4 [1W]
# Key:       Airports, Class [30]
       Week Airports Class    Passengers
      <week> <chr>    <chr>         <dbl>
 1 1989 W28 ADL-PER  Business        193
 2 1989 W29 ADL-PER  Business        254
 3 1989 W30 ADL-PER  Business        185
 4 1989 W31 ADL-PER  Business        254
 5 1989 W32 ADL-PER  Business        191
 6 1989 W33 ADL-PER  Business        136
 7 1989 W34 ADL-PER  Business          0
 8 1989 W35 ADL-PER  Business          0
```

2.1. 时序图（time plot）

```
ansett |>
  filter(Airports == "MEL-SYD", Class == "Economy") |>
  autoplot()
```

```
Plot variable not specified, automatically selected `.vars = Passengers`
```



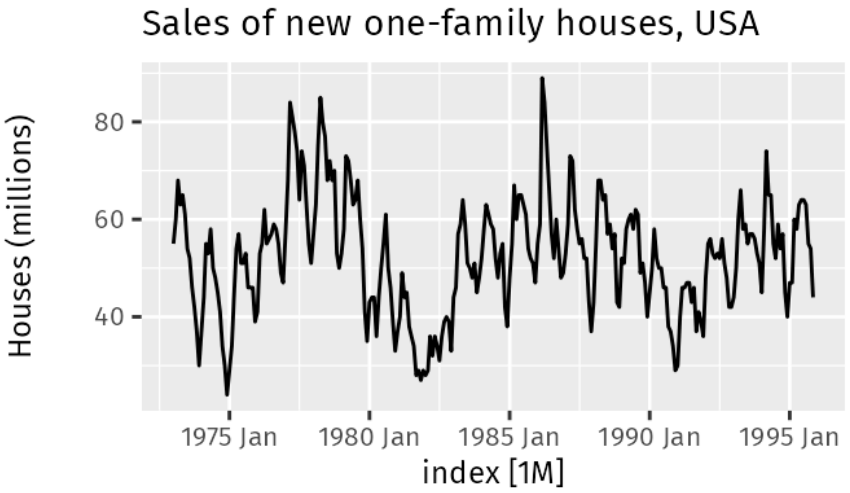
2.2. 时间序列特征

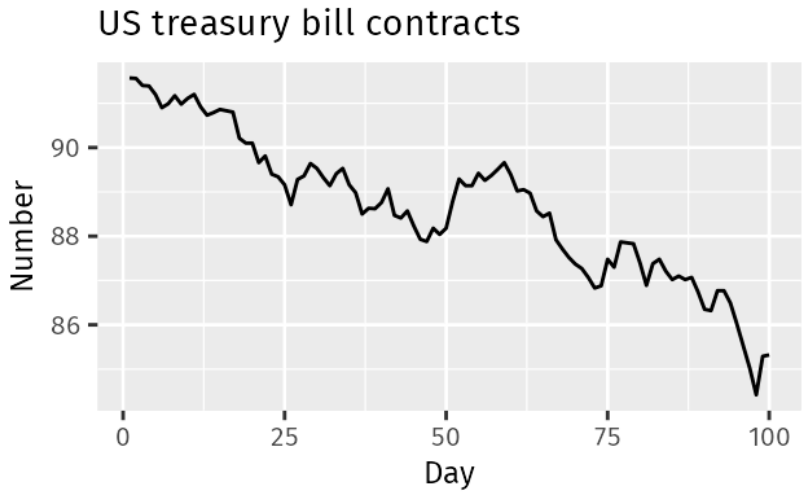
在描述时序图所体现的数据特征时，我们常会用到以下概念：

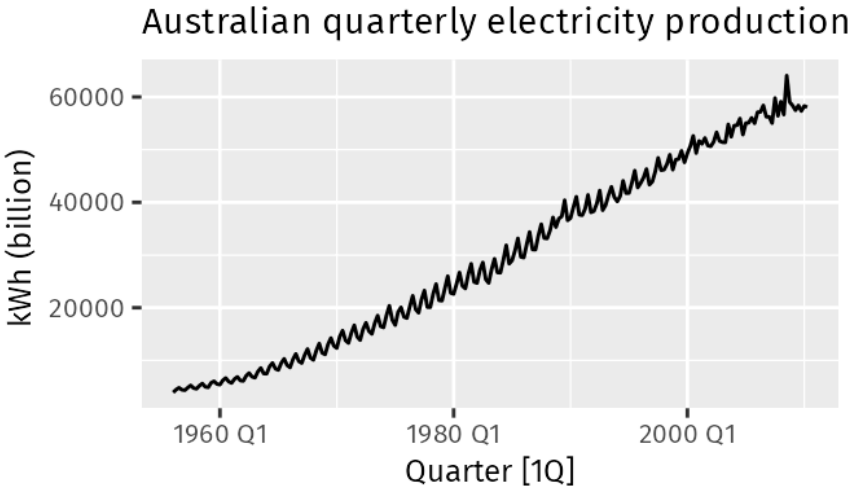
- **趋势（trend）**：数据体现出的长期增加或减少。
- **季节性（seasonality）**：数据中和季节性因素相吻合的变化，例如一年中的固定时期或一周中的固定日期。
- **周期（cycle）**：没有固定频率的增加和减少，通常和经济周期（business cycle）相关，时间跨度一般大于两年。

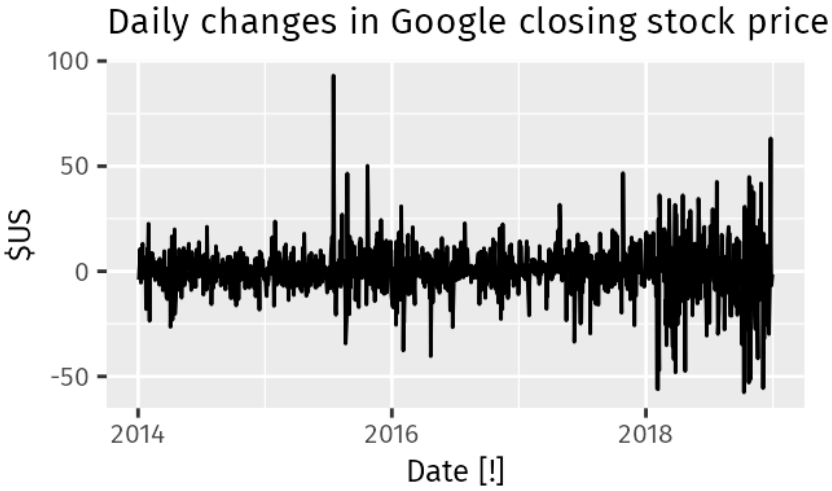
不同模型对这几种特征有不同的解释能力，因此在选择模型之前，我们首先应该判断数据中体现的是哪几种特征的组合。

2.2. 时间序列特征


Sales of new one-family houses, USA
Houses (millions)
80
60
40
1975 Jan
1980 Jan
1985 Jan
1990 Jan
1995 Jan
index [1M]

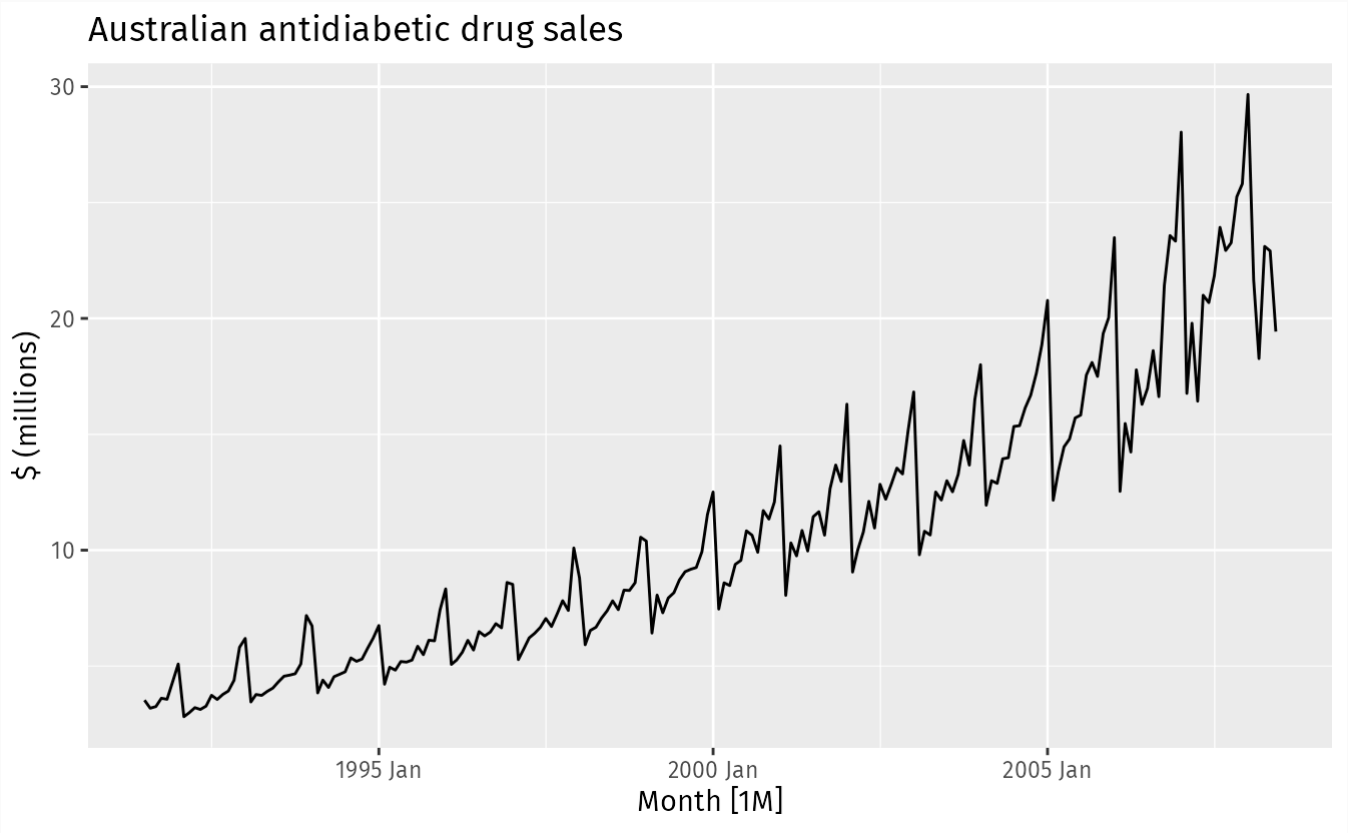

US treasury bill contracts
Number
90
88
86
0
25
50
75
100
Day


Australian quarterly electricity production
kWh (billion)
60000
40000
20000
1960 Q1
1980 Q1
2000 Q1
Quarter [1Q]


Daily changes in Google closing stock price
$US
100
50
0
-50
2014
2016
2018
Date [!]

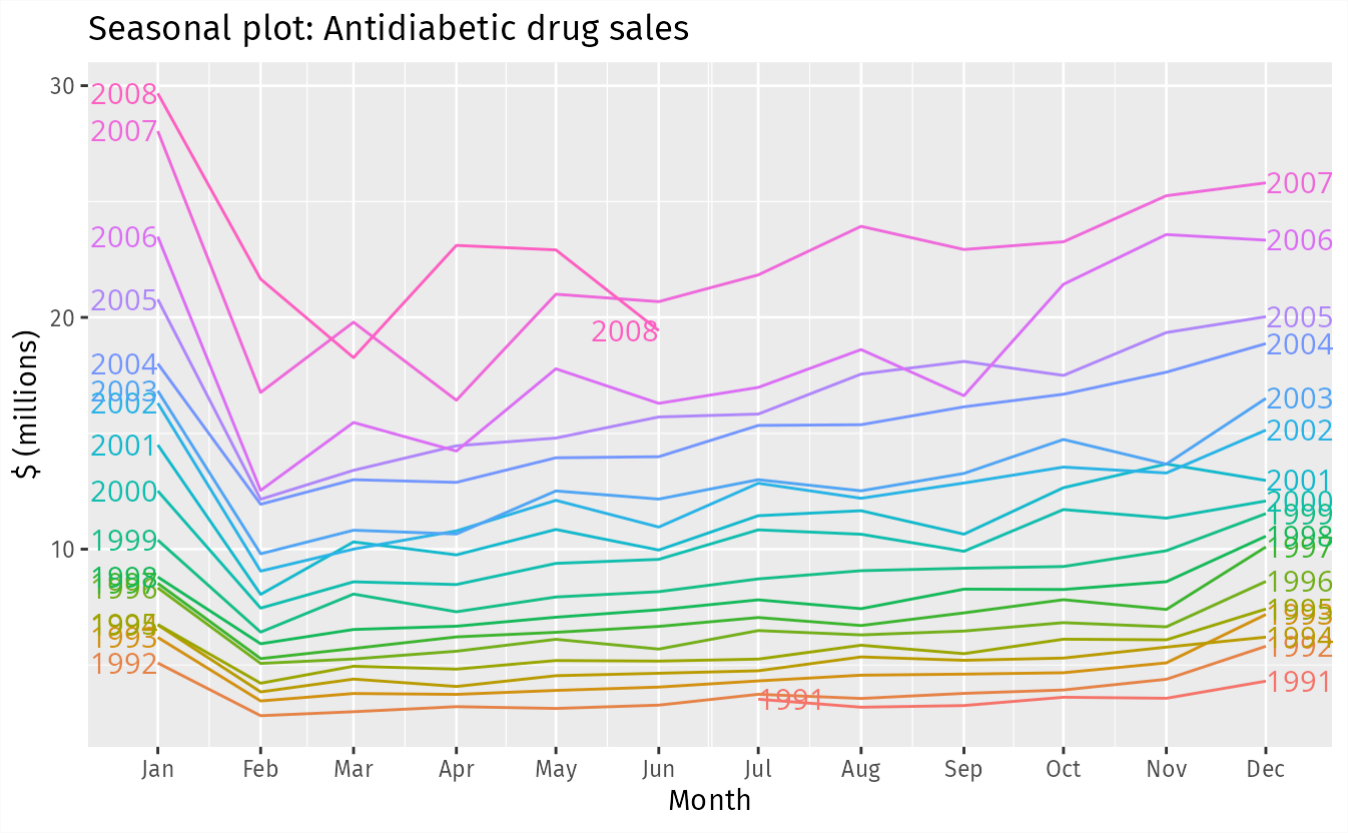
2.3. 通过季节图展现季节性特征

下图显示了澳大利亚糖尿病药物月度销售额，可以看到明显的季节性特征



2.3. 通过季节图展现季节性特征

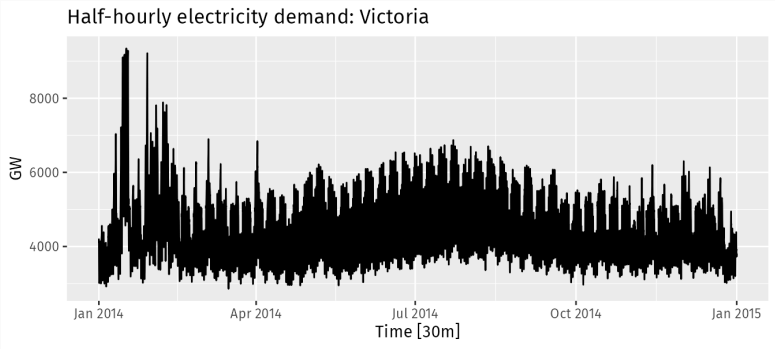
下面的季节图（seasonal plot）将横轴取为 12 个月，并将每年的数据堆叠绘制。这样可以更清晰地观察季节性特征及其整体变化趋势。（更多信息参考第 2.4 – 2.5 节）



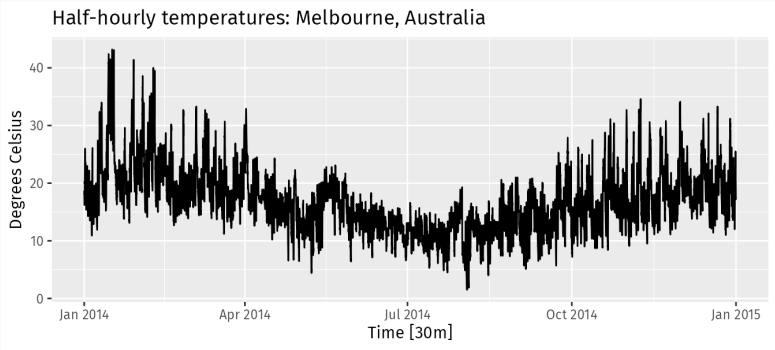
3. 散点图和相关性

3.1. 用散点图展示不同序列间的关系

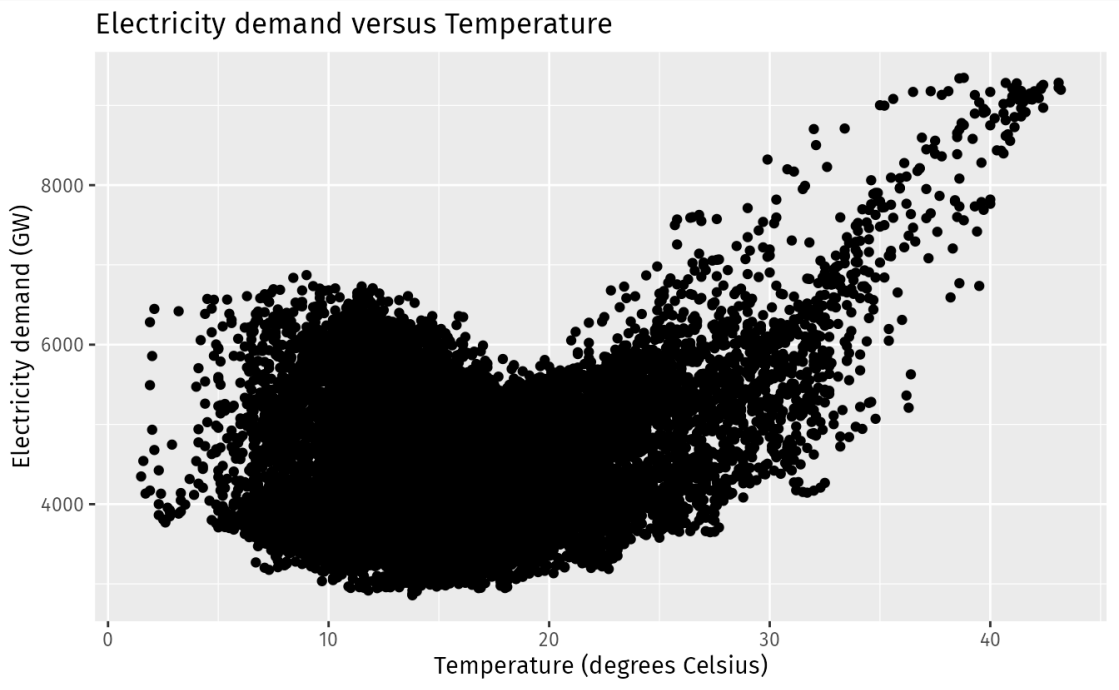
电力需求



气温



气温和电力需求间的关系



3.2. 相关系数

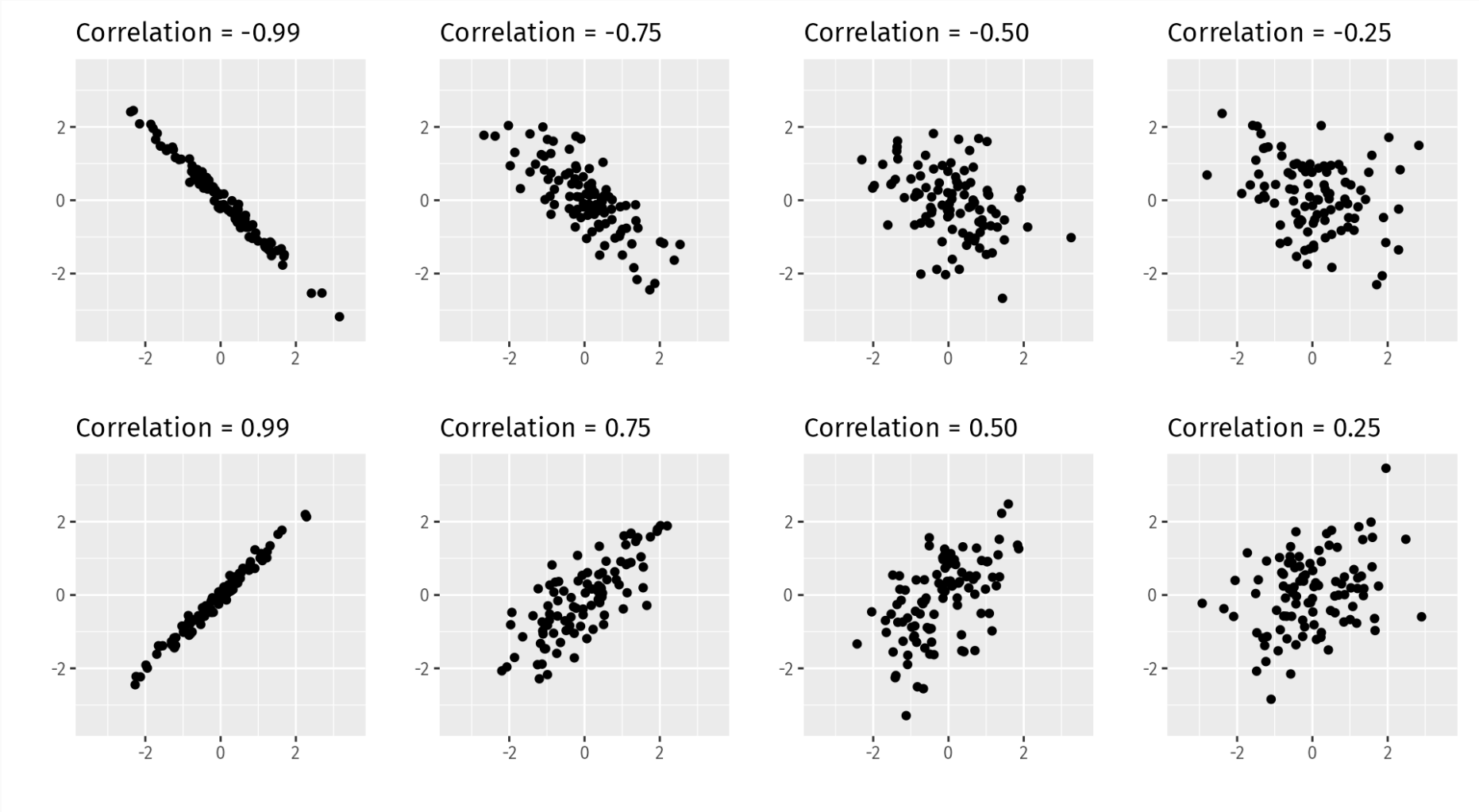
相关系数（correlation coefficient）

$$r = \frac{\sum_t (x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sqrt{\sum_t (x_t - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_t (y_t - \overline{y})^2}}$$

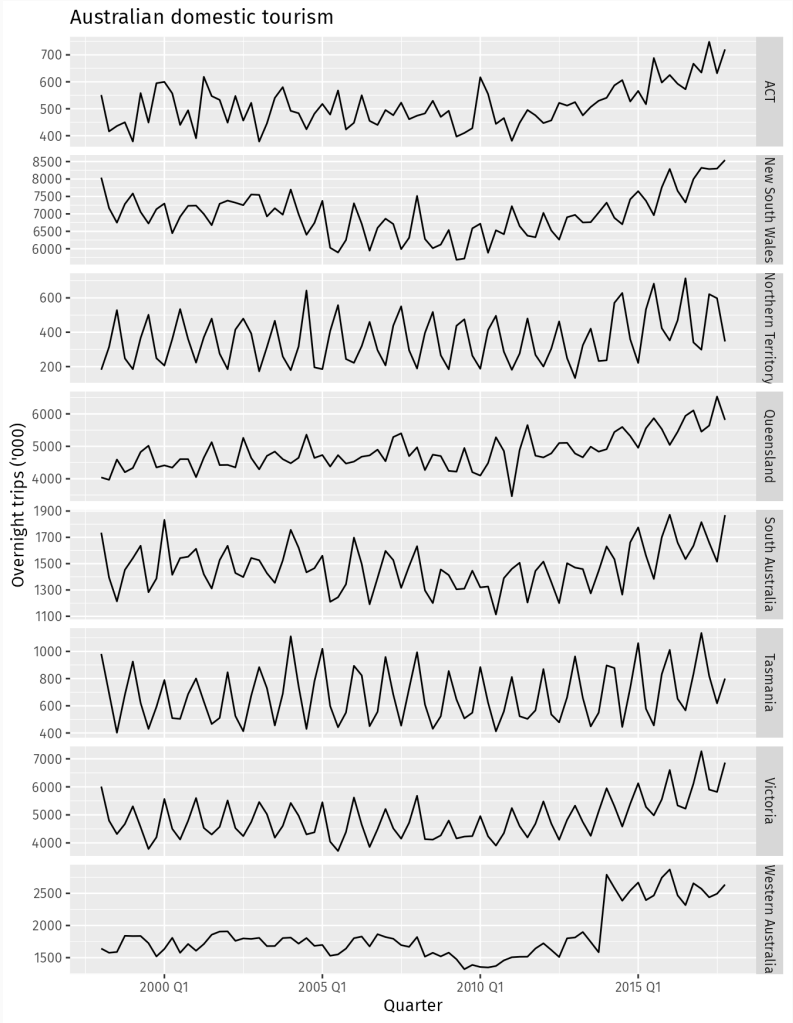
- $-1 < r < 1$
- $|r|$ 的大小表示**线性相关**的强弱

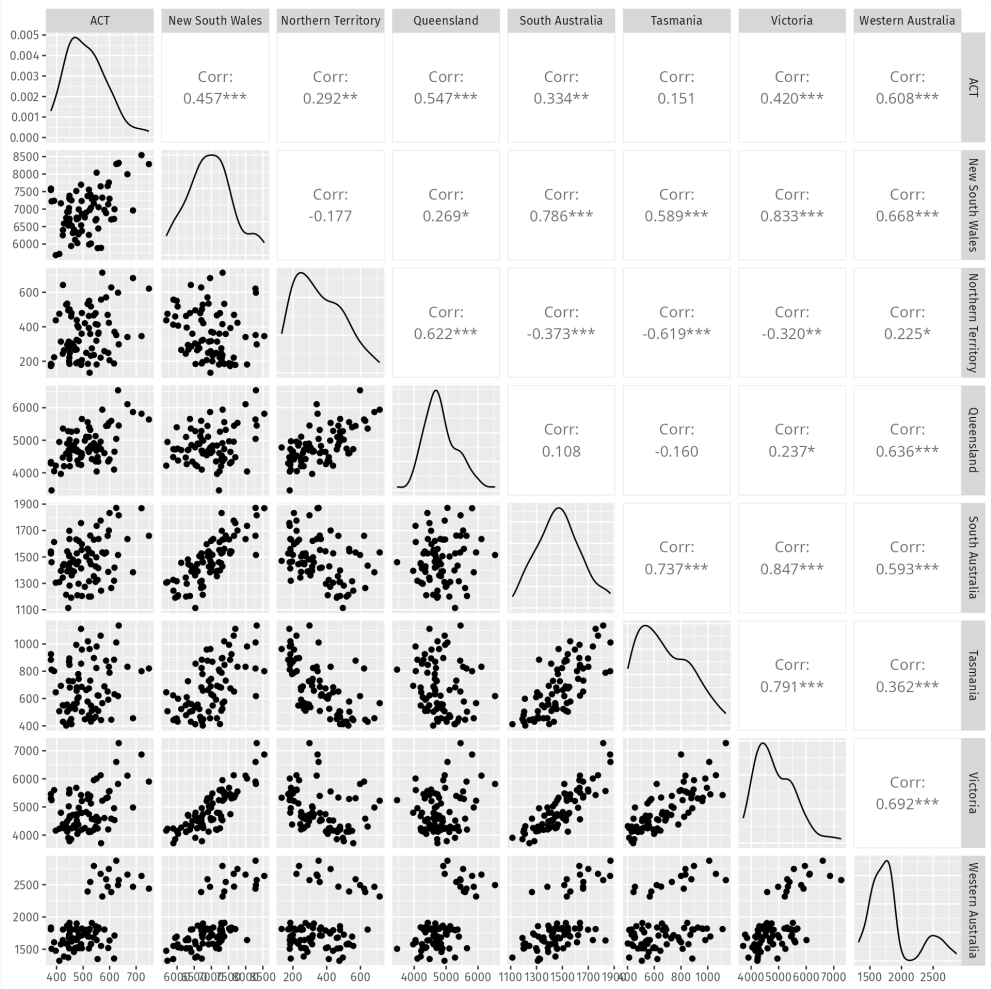
电力需求和气温间的相关系数为 0.28。两者间的非线性关系明显强于线性相关性。

3.2. 相关系数


Correlation = -0.99
Correlation = -0.75
Correlation = -0.50
Correlation = -0.25
Correlation = 0.99
Correlation = 0.75
Correlation = 0.50
Correlation = 0.25
2
0
-2
-2
0
2

3.2. 相关系数


Australian domestic tourism
Overnight trips ('000)
Quarter
2000 Q1
2005 Q1
2010 Q1
2015 Q1
ACT
New South Wales
Northern Territory
Queensland
South Australia
Tasmania
Victoria
Western Australia


ACT
New South Wales
Northern Territory
Queensland
South Australia
Tasmania
Victoria
Western Australia
Corr: 0.457***
Corr: 0.292**
Corr: 0.547***
Corr: 0.334**
Corr: 0.151
Corr: 0.420***
Corr: 0.608***
Corr: -0.177
Corr: 0.269*
Corr: 0.786***
Corr: 0.589***
Corr: 0.833***
Corr: 0.668***
Corr: 0.622***
Corr: -0.373***
Corr: -0.619***
Corr: -0.320**
Corr: 0.225*
Corr: 0.108
Corr: -0.160
Corr: 0.237*
Corr: 0.636***
Corr: 0.737***
Corr: 0.847***
Corr: 0.593***
Corr: 0.791***
Corr: 0.362***
Corr: 0.692***

3.3. 滞后图（lag plot）

滞后（lag）是时间序列分析中的一个重要概念。例如 2 月 10 日的一日滞后是 2 月 9 日，两日滞后是 2 月 8 日。

当我们讨论一个序列 y_t 时，我们指的是观测值的集合

$$\{y_t \mid t = 0, 1, \ldots, T\}$$

此时，y_t 的 k 期滞后序列 y_{t-k} 指的则是

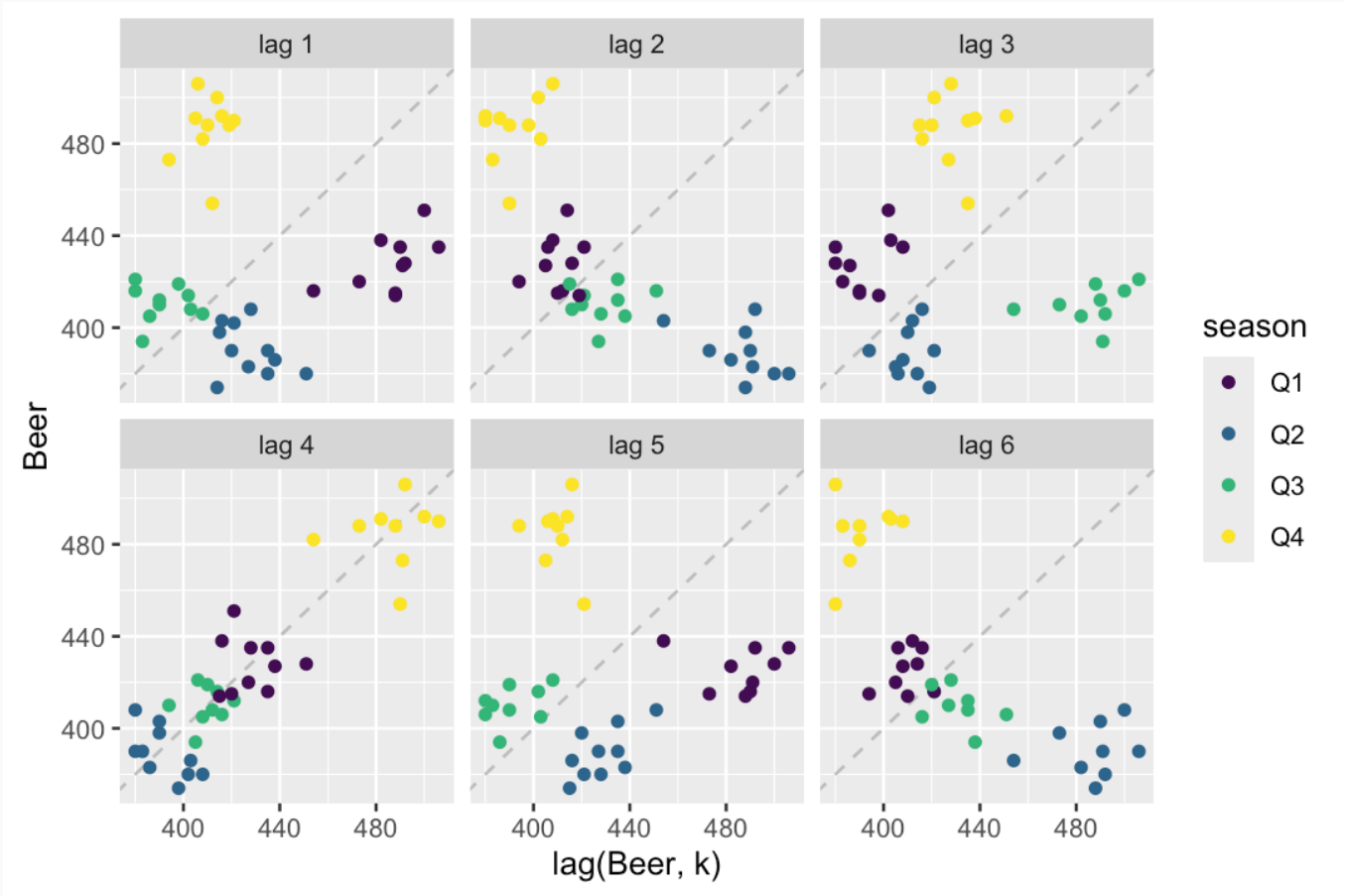
$$\{y_s \mid t = -k, 1 - k, \ldots, T - k\}$$

其中 $y_{-k}, \ldots, y_{-1}$ 的值往往是缺失的。

因此，我们可以比较序列 y_t 和它自身的滞后序列 y_{t-k} 之间的关系。用二者绘制的散点图称为**滞后图（lag plot）**，用二者计算的相关系数称为**自相关系数（autocorrelation coefficient）**。

3.3. 滞后图（lag plot）

用 `feasts` 包提供的函数 `gg_lag()` 可以绘制滞后图（详见第 2.7 节）。



3.4. 自相关系数

序列 y_t 和 y_{t-k} 间的**自相关系数（autocorrelation coefficient）** r_k 定义为

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}$$

也称为**自相关函数（autocorrelation funciton, ACF）**。

`feasts` 包中的 `ACF()` 函数（注意大小写）提供了计算自相关系数的功能。

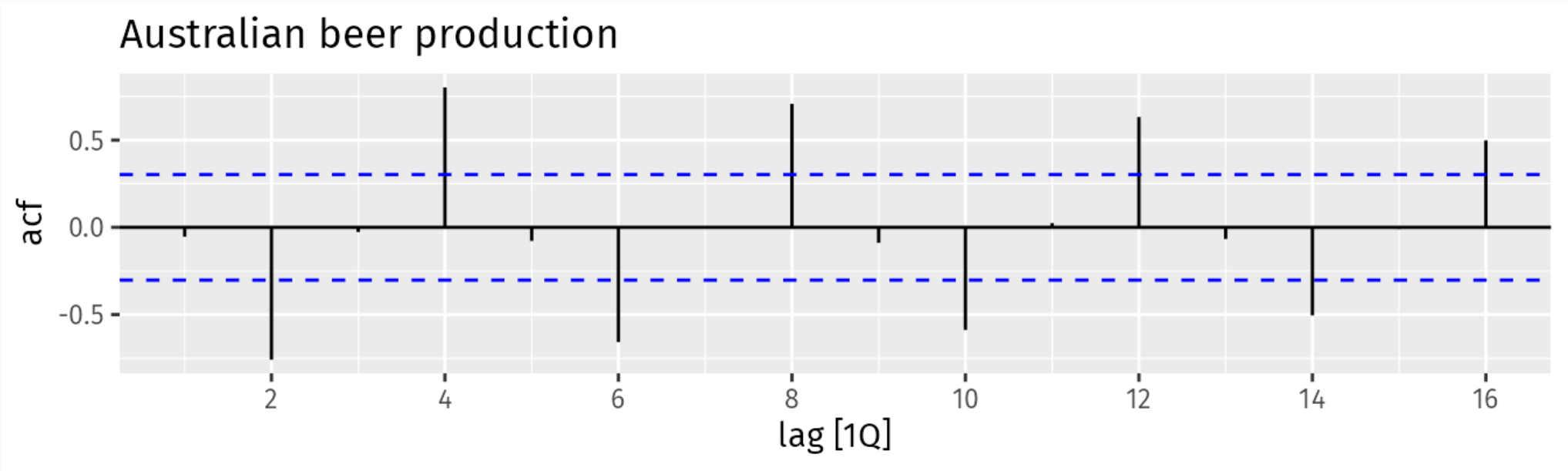
```
aus_production |> filter(year(Quarter) >= 2000) |> ACF(Beer, lag_max = 3)
```

```
# A tsibble: 3 x 2 [1Q]
       lag     acf
  <cf_lag>   <dbl>
1       1Q -0.0530
2       2Q -0.758
3       3Q -0.0262
```

3.4. 自相关系数

用多个自相关系数（$k = 1, 2, \ldots, K$）绘制的图表称为**自相关图（correlogram）**。

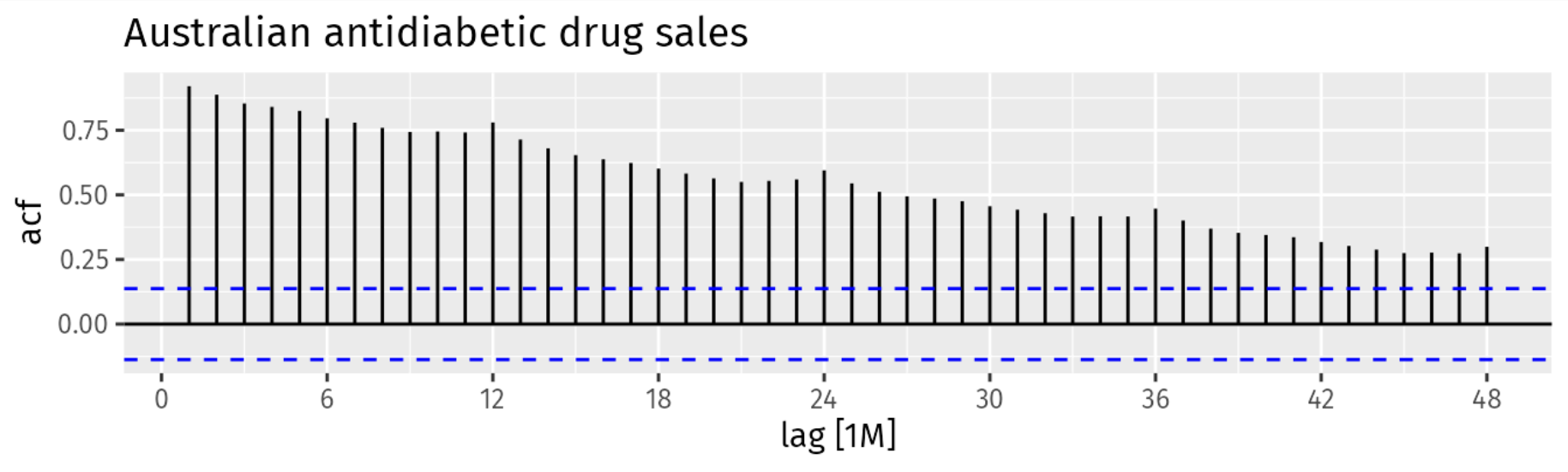
```
aus_production |>
  filter(year(Quarter) >= 2000) |> ACF(Beer) |>
  autoplot() + labs(title="Australian beer production")
```



3.4. 自相关系数

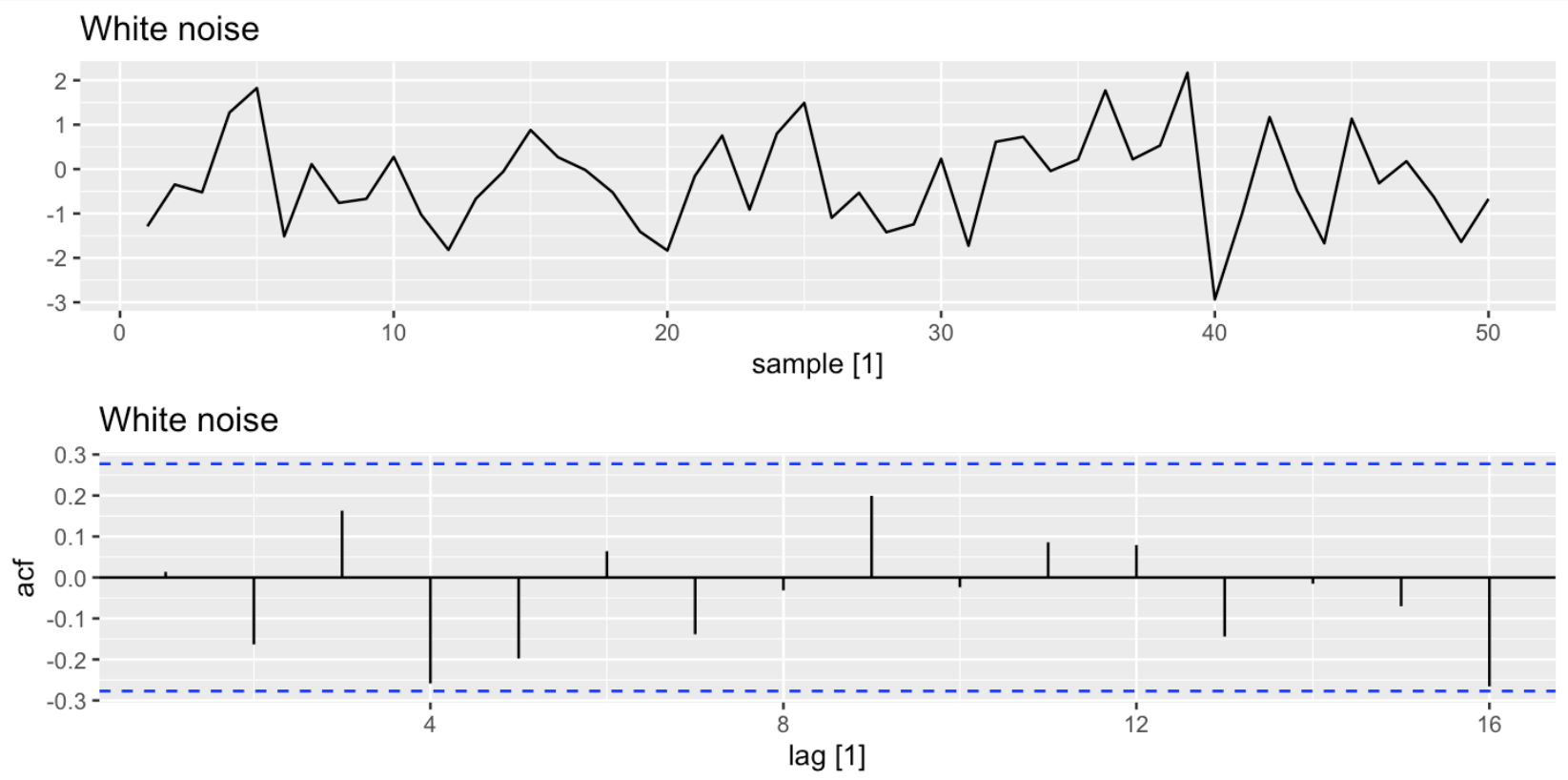
- 当序列存在趋势时，自相关系统通常为正且慢慢减小。
- 当序列存在季节性时，滞后期为季节周期的整数倍时，自相关系数会大于其他滞后期。

下图中的数据是典型的趋势和季节性共存的序列，季节周期为 12 期。



3.5. 白噪声（white noise）

没有自相关的序列称为**白噪声（white noise）**。



4. 课后练习

4. 课后练习

- 学习教科书第 2 章（Time Series Graphics）中的内容，并尝试在自己的电脑上复现书中的结果。

- 回答下列问题：

  1. 列出 olympic_running 数据集共包含了哪些跑步项目。
  2. `feasts` 包中的 `ACF()` 函数计算的自相关系数和根据定义计算的结果是否一致？请举例验证。