

高级计量经济学

理论经济学博士课程 2023-2024

Lecture 5: Frisch-Waugh-Lovell Theorem

Davidson, R. & MacKinnon, J. (2009). *Econometrics Theory and Methods*. Oxford University Press.

黄嘉平

工学博士 经济学博士
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

办公室 粤海校区汇文楼1510
E-mail huangjp@szu.edu.cn
Website <https://huangjp.com>

分块回归

分块回归

Partitioned Regression

我们可以将解释变量分为两组，即

$$X = [X_1 \quad X_2],$$

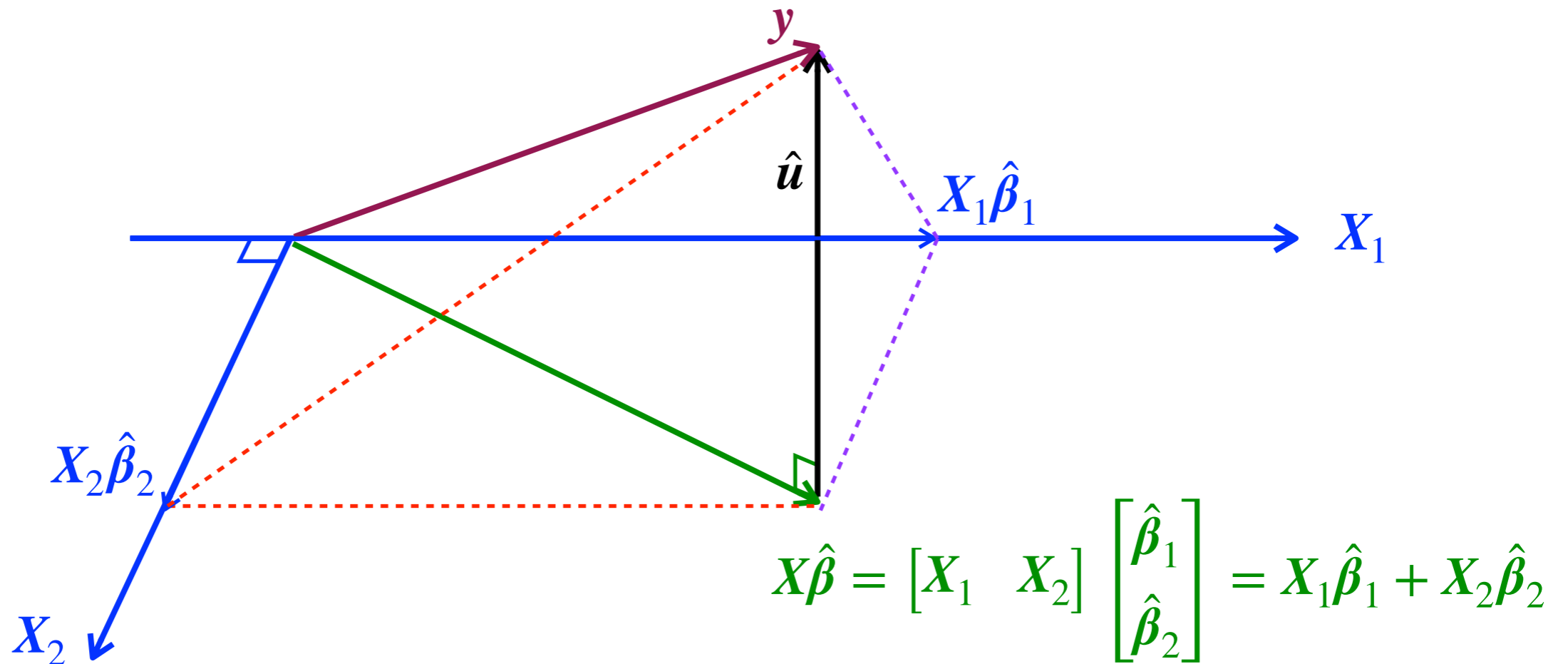
其中 X_1 为 $n \times k_1$ ， X_2 为 $n \times k_2$ ， $k_1 + k_2 = k$ 。回归模型可以写成

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

接下来我们首先假设 X_1 中的所有变量与 X_2 中的所有变量正交，然后再放松这个假设。

若 X_1 中的变量与 X_2 中的变量正交，则 $X_1^\top X_2 = \mathbf{0}$ 。

当 X_1 与 X_2 正交



用 $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$ 拟合的 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 分别等于
用 $y = X_1\beta_1 + u_1$ 和 $y = X_2\beta_2 + u_2$ 拟合的参数值。

如果 X_1 和 X_2 正交，在研究其中之一时可以不控制另一组变量。

正交向量与样本的 Pearson 相关系数

$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0$ 和 $r_{xy} = 0$ 是经常容易混淆的两个概念。

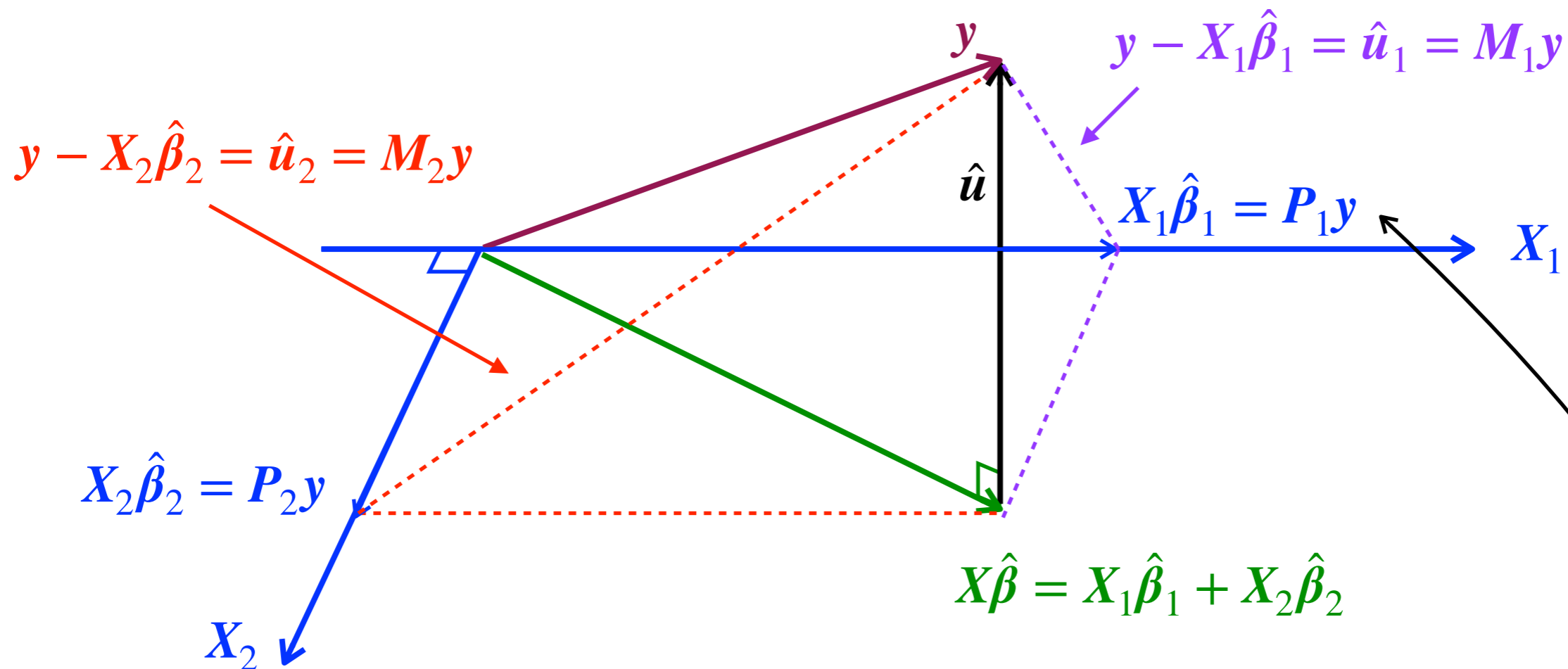
样本相关系数 r_{xy} 的定义是

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

可见，只有在 $\bar{x}\bar{y} = 0$ 时， $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow r_{xy} = 0$ 。

若将变量进行中心化处理，即 $x_i - \bar{x}$ ，则处理后的样本均值为零，此时**正交**等同于**不相关**。（相同结论在总体层面也成立）

y 在 $\mathcal{S}(X_1)$ 和 $\mathcal{S}(X_2)$ 上的投影



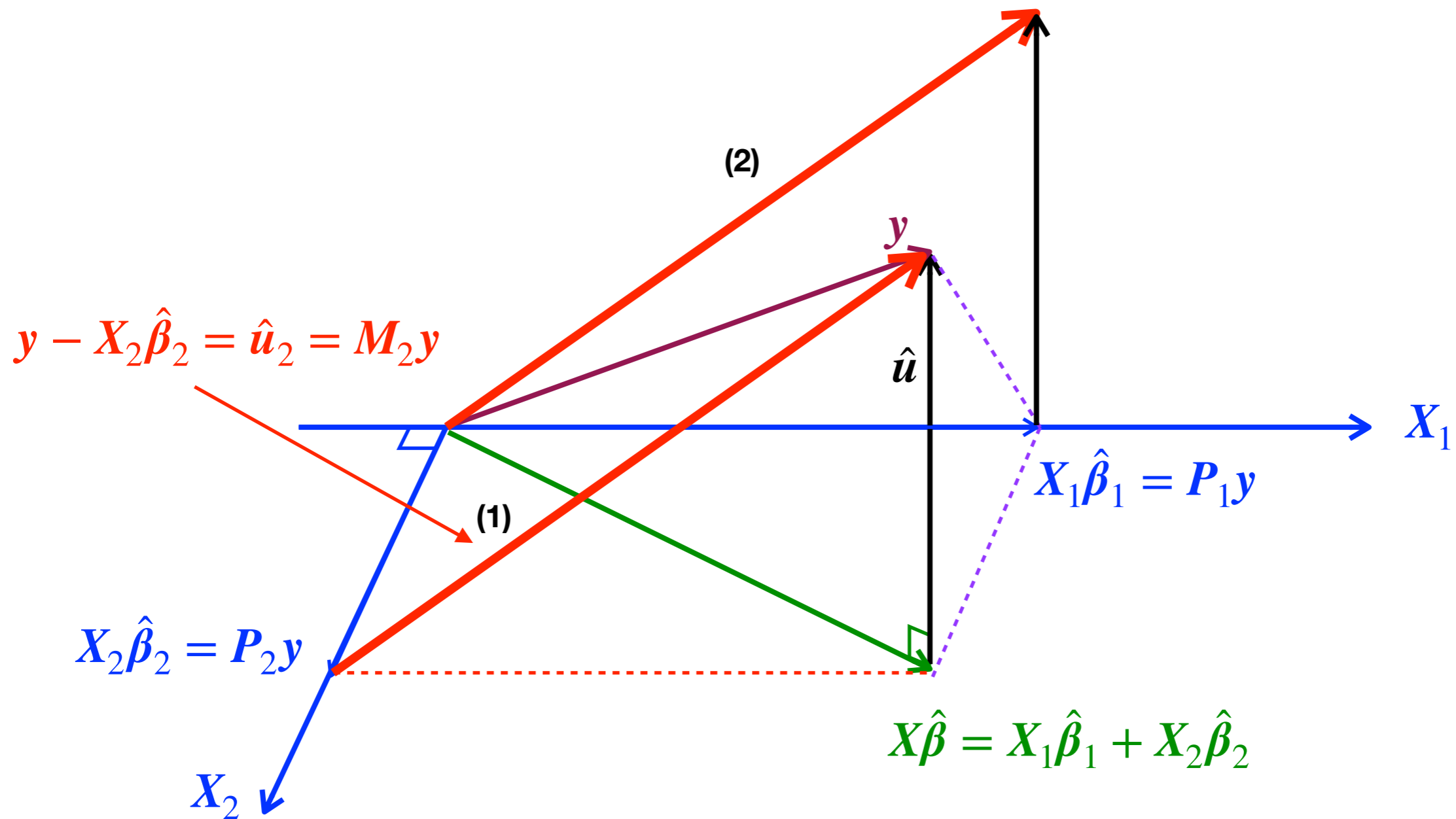
$$\text{令 } P_1 \equiv P_{X_1} = X_1(X_1^\top X_1)^{-1}X_1^\top$$

$$\begin{aligned}
 P_X P_1 &= P_X X_1 (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top \\
 &\rightarrow = X_1 (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top = P_1
 \end{aligned}$$

因为 X_1 的所有列都包含在 $\mathcal{S}(X)$ 中

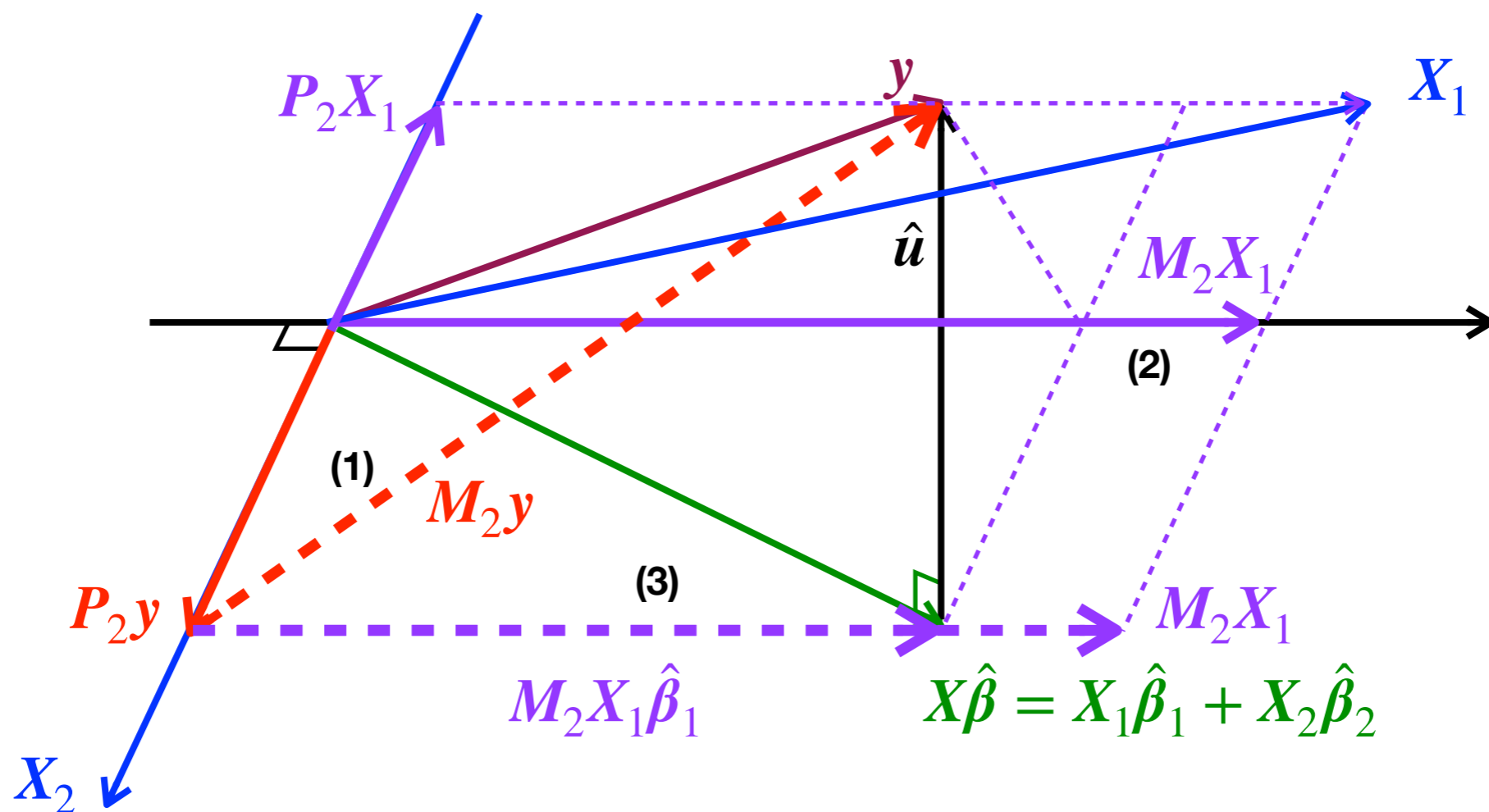
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P_1 y &= P_1 P_X y = P_1 (X_1 \hat{\beta}_1 + X_2 \hat{\beta}_2) \\
 &\rightarrow = P_1 X_1 \hat{\beta}_1 = X_1 \hat{\beta}_1
 \end{aligned}$$

X_1 与 X_2 正交



- (1) 拟合 $y = X_2\beta_2 + u_2$ 并得到残差 M_2y 。
- (2) 用 X_1 对 M_2y 进行回归，则得到的参数为 $\hat{\beta}_1$ ，残差为 \hat{u} ，与 $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$ 的拟合结果一致。

当 X_1 与 X_2 非正交



- (1) 用 X_2 对 y 进行回归并得到残差 M_2y 。
- (2) 用 X_2 对 X_1 的每一列进行回归并得到残差 M_2X_1 。
- (3) 用 M_2X_1 对 M_2y 进行回归，则得到的参数为 $\hat{\beta}_1$ ，残差为 \hat{u} ，与 $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$ 的拟合结果一致。

The Frisch-Waugh-Lovell Theorem

The Frisch-Waugh-Lovell Theorem

考虑下面三个回归模型：

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \quad (1)$$

$$M_2y = M_2X_1b_1 + v \quad (2)$$

$$y = M_2X_1d_1 + w \quad (3)$$

1. 关于 X_1 的系数，模型 (1-3) 的 OLS 估计值相同，即 $\hat{\beta}_1 = \hat{b}_1 = \hat{d}_1$ 。
 2. 模型 (1) 和 (2) 的 OLS 残差相同，和模型 (3) 的残差不同，即 $\hat{u} = \hat{v} \neq \hat{w}$ 。
- 我们通常称 (1) 为长模型，(2) 和 (3) 为短模型。
 - 短模型的作用可以理解为：虽然在长模型中 X_1 与 X_2 非正交，但我们可以想办法找到两个正交矩阵，那就是 M_2X_1 和 X_2 。同时， $\mathcal{S}(X_1, X_2) = \mathcal{S}(M_2X_1, X_2)$ 。因此用 (X_1, X_2) 回归 y 得到的参数等同于用 (M_2X_1, X_2) 回归 y 或 M_2y 得到的参数，而后者可以不控制 X_2 。
 - 如果样本量很大，则长模型的 OLS 拟合需要用更长的时间和更多的资源去计算 $(X^T X)^{-1}$ 。短模型则可以节省时间和资源。Frisch & Waugh 在 1933 年率先发现了这个结论，当时还没有电子计算机。

FWL 定理的证明

X_1 和 X_2 正交

根据标准方程 $X^\top X \hat{\beta} = X^\top y$ ，由模型 $y = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + u$ 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1^\top \\ X_2^\top \end{bmatrix} [X_1 \quad X_2] \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1^\top \\ X_2^\top \end{bmatrix} y \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_1^\top X_1 & X_1^\top X_2 \\ X_2^\top X_1 & X_2^\top X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1^\top y \\ X_2^\top y \end{bmatrix} \quad \text{--- (#)} \end{aligned}$$

若 $X_1^\top X_2 = \mathbf{0}$ ，则 $X_2^\top X_1 = \mathbf{0}$ 。此时 (#) 可写成

$$\begin{bmatrix} X_1^\top X_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X_2^\top X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^\top y \\ X_2^\top y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1^\top X_1)^{-1} X_1^\top y \\ (X_2^\top X_2)^{-1} X_2^\top y \end{bmatrix}$$

因此，当 X_1 和 X_2 正交时，回归系数 $\hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\beta}_2$ 可以分别由两个短模型 $y = X_1 \beta_1 + u_1$ 和 $y = X_2 \beta_2 + u_2$ 获得。

FWL 定理的证明

系数的 OLS 估计值相同

一般情况下, 由 (#) 可得

$$X_1^T X_1 \hat{\beta}_1 + X_1^T X_2 \hat{\beta}_2 = X_1^T y \quad \dots\dots (a)$$

$$X_2^T X_1 \hat{\beta}_1 + X_2^T X_2 \hat{\beta}_2 = X_2^T y \quad \dots\dots (b)$$

由 (b) 可得 $\hat{\beta}_2 = (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T (y - X_1 \hat{\beta}_1)$ 。将此式代入 (a) 可得

$$X_1^T X_1 \hat{\beta}_1 + X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T (y - X_1 \hat{\beta}_1) = X_1^T y$$

$$(X_1^T X_1 - X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T X_1) \hat{\beta}_1 = (X_1^T - X_1^T X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T) y$$

$$X_1^T (I - X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T) X_1 \hat{\beta}_1 = X_1^T (I - X_2 (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T) y$$

$$X_1^T M_2 X_1 \hat{\beta}_1 = X_1^T M_2 y$$

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^T M_2 X_1)^{-1} X_1^T M_2 y$$

$$\Rightarrow = (X_1^T M_2^T M_2 X_1)^{-1} X_1^T M_2^T M_2 y$$

M_2 对称且幂等

$$= [(M_2 X_1)^T M_2 X_1]^{-1} (M_2 X_1)^T M_2 y = [(M_2 X_1)^T M_2 X_1]^{-1} (M_2 X_1)^T y$$

模型 (2) 的 OLS 估计 \hat{b}_1

模型 (3) 的 OLS 估计 \hat{d}_1

FWL 定理的证明

OLS 残差相同

模型 (1) 的 OLS 残差是

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = y - X_1\hat{\beta}_1 - X_2\hat{\beta}_2$$

针对最左侧和最右侧的表达式，分别从左边乘以 M_2 可得

$$M_2\hat{u} = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1 - M_2X_2\hat{\beta}_2 \quad \leftarrow$$
$$\curvearrowright \hat{u} = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1 \quad M_2X_2 = 0$$

$$\hat{u} \in \mathcal{S}^\perp(X) \subseteq \mathcal{S}^\perp(X_2)$$

模型 (2) 和 (3) 的残差分别为

$$\hat{v} = M_2y - M_2X_1\hat{b}_1 = M_2y - M_2X_1\hat{\beta}_1$$

$$\hat{w} = y - M_2X_1\hat{d}_1 = y - M_2X_1\hat{\beta}_1$$

因此，一般情况下 $\hat{u} = \hat{v} \neq \hat{w}$ ，仅当 $y \in \mathcal{S}^\perp(X_2)$ 时 $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w}$ 。

如何理解 FWL 定理

- 以模型 (1) 和 (3) 为例：

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \quad (1)$$

$$y = M_2X_1d_1 + w \quad (3)$$

- 如果我们的主要研究对象是 X_1 ，则模型 (1) 中的 X_2 有可能和 X_1 存在相关性。
- 模型 (3) 中的 M_2X_1 是用 X_2 解释了 X_1 后剩下的部分，即 X_1 中无法被 X_2 解释的变化。此时的 OLS 估计量 \hat{d}_1 就是 X_1 自身的变动部分对 y 的变动的的影响，与 X_2 无关。
- 因此，为了准确估计 (3) 中的 \hat{d}_1 ，我们可以直接估计长模型 (1) 中的系数。也就是所谓的控制了 X_2 中的变量。

FWL 定理的应用

中心化 (deviation from the mean, or centering)

这里考虑单变量回归模型

$$y = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

\mathbf{x} 和 $\mathbf{1}$ 非正交，但是如果对 \mathbf{x} 进行中心化，即定义 $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}$ ，则 \mathbf{z} 和 $\mathbf{1}$ 正交：

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{z} = \mathbf{1}^\top (\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}) = \mathbf{1}^\top \mathbf{x} - \mathbf{1}^\top \bar{x}\mathbf{1} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

又因 $M_{\mathbf{1}} = \mathbf{I} - \mathbf{1}(\mathbf{1}^\top \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}^\top = \mathbf{I} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top$,

$$M_{\mathbf{1}} \mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} - \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1} = \mathbf{z}$$

可知 \mathbf{x} 的中心化可以通过用 $\mathbf{1}$ 回归 \mathbf{x} 的 OLS 残差获得。因此，根据 FWL 定理，

$$y = \beta_1 \mathbf{1} + \beta_2 \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad \text{和} \quad M_{\mathbf{1}} \mathbf{y} = M_{\mathbf{1}} \mathbf{x} \hat{b} + \hat{\mathbf{v}} \quad (\text{对 } \mathbf{x} \text{ 和 } \mathbf{y} \text{ 分别进行了中心化处理})$$

中 \mathbf{x} 系数的 OLS 估计值相同，残差相同，即 $\hat{\beta}_2 = \hat{b}$ ， $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}$ 。

FWL 定理的应用

Adjusting seasonality

时间序列数据的季节性特征一般可以通过加入季节虚拟变量 (seasonal dummy) 来实现, 下面是一个具体模型:

$$y = \delta_1 s_1 + \delta_2 s_2 + \delta_3 s_3 + \delta_4 s_4 + X\beta + u = S\delta + X\beta + u,$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

令 $M_S = I - S(S^T S)^{-1} S^T$, 则根据 FWL 定理, 可以通过以下模型

$$M_S y = M_S X b + v$$

获得相同的系数估计值和残差。这种先将数据用 M_S 进行投影 (用季节虚拟变量进行回归) 的操作叫做季节性调整 (seasonal adjustment)。FWL 定理告诉我们, 进行季节性调整和加入季节虚拟变量的效果是一样的。

一些有用的公式和性质

- 模型 $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$ 的 OLS 估计可以表达为

$$\hat{\beta}_1 = (X_1^\top M_2 X_1)^{-1} X_1^\top M_2 y$$

$$\hat{\beta}_2 = (X_2^\top M_1 X_2)^{-1} X_2^\top M_1 y$$

- 若 \mathbf{v} 是解释变量之一，或 $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(X)$ ，则 OLS 残差 $\hat{\mathbf{u}}$ 与 \mathbf{v} 正交，因此残差的均值为零

$$\bar{\hat{u}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t = \frac{1}{n} \mathbf{1}^\top \hat{\mathbf{u}} = 0$$

- OLS 残差 $\hat{\mathbf{u}}$ 与每个解释变量 x_i 正交，加上 $\bar{\hat{u}} = 0$ ，可知 $\hat{\mathbf{u}}$ 与每个 x_i 的相关系数都为零

$$r_{x_i, \hat{\mathbf{u}}} = \frac{\mathbf{x}_i^\top \hat{\mathbf{u}} - n \bar{x}_i \bar{\hat{u}}}{\sqrt{\sum_t (x_{ti} - \bar{x}_i)^2 \sum_t (u_t - \bar{\hat{u}})^2}} = 0$$

课外阅读

- Frisch, R. and Waugh, F. V. (1933).
Partial Time Regressions as Compared with Individual Trends.
Econometrica, 1:4, 387-410.
<https://www.jstor.org/stable/1907330>
- Lovell, M. C. (1963).
Seasonal Adjustment of Economic Time Series and Multiple Regression Analysis.
Journal of the American Statistical Association, 58:304, 993-1010.
<https://www.jstor.org/stable/2283327>