高级计量经济学

理论经济学博士课程

Lecture 11: Maximum Likelihood Estimation

黄嘉平

工学博士 经济学博士
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

Office 粤海校区汇文楼1510
Email huangjp@szu.edu.cn
Website https://huangjp.com

似然函数和最大似然估计

似然函数
Likelihood function

假设随机向量 $\boldsymbol{y}$ 服从参数为 $\boldsymbol{\theta}$ 的分布。在 $\boldsymbol{\theta}$ 已知的情况下，$\boldsymbol{y}$ 的密度函数可以写成 $f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})$。

例如正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 有两个参数，其密度函数为

$$f(y \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

而在参数估计中，$\boldsymbol{y}$ 的观测值是已知的，但 $\boldsymbol{\theta}$ 是未知的。此时，我们可以将上述密度函数理解为 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，即

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) \equiv f(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})$$

称为似然函数（likelihood function）。

之所以称为似然函数，是因为 $L(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数不满足概率密度函数的定义

最大似然估计
Maximum likelihood estimation

令似然函数最大的参数估计量

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg\max}\ L(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y})$$

称为最大似然估计量（maximum likelihood estimator, MLE）。我们也可以用对数似然函数（log-likelihood function）$\ell(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) = \log L(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y})$ 替代似然函数。

当 y_t 之间相互独立时，$\boldsymbol{y}$ 的联合密度是 y_t 的密度函数之积，此时

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) = \prod_{t=1}^{n} f_t(y_t \mid \boldsymbol{\theta}) \quad \Rightarrow \quad \ell(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{y}) = \sum_{t=1}^{n} \log f_t(y_t \mid \boldsymbol{\theta})$$

似然函数是多项的乘积，其取值会变得非常小，不适合计算机进行数值计算，这是选择对数似然函数的原因之一。

对指数分布期望值的估计

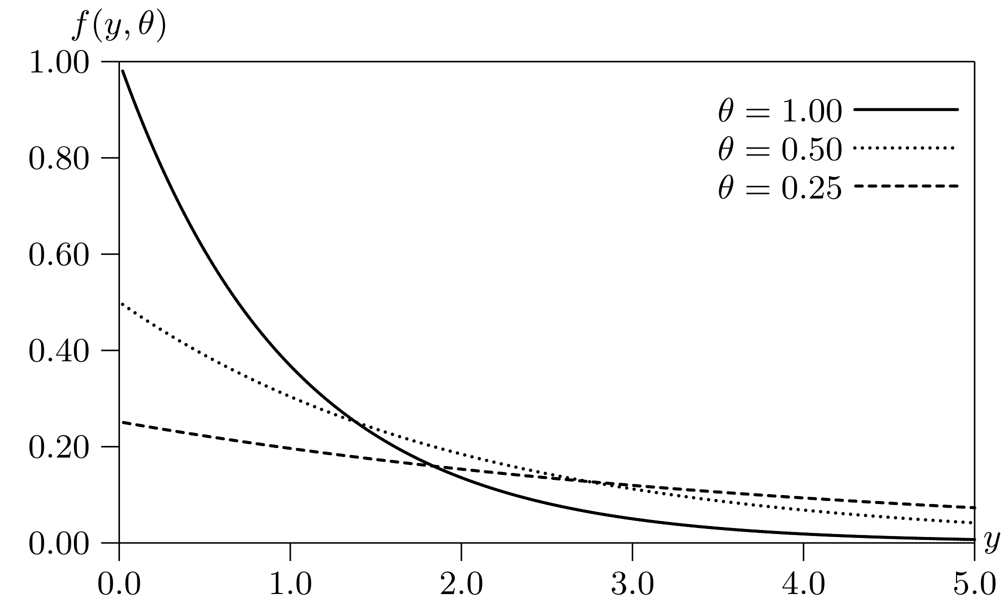


Figure 10.1 The exponential distribution

假设 y_t 是服从指数分布的独立样本，即

$$f(y_t \mid \theta) = \theta e^{-\theta y_t}, \quad y_t > 0,\, \theta > 0$$

此时，y_t 的对数似然函数是 $\ell(\theta \mid y_t) = \log\theta - \theta y_t$，则

$$\ell(\theta \mid \boldsymbol{y}) = n\log\theta - \theta\sum_{t=1}^{n} y_t$$

θ 的最大似然估计量可以通过解一阶条件求得：

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{t=1}^{n} y_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{\mathrm{ML}} = \frac{n}{\sum_{t=1}^{n} y_t} = \frac{1}{\bar{y}}$$

（可以确认二阶导为负）

在这个例子中，$\hat{\theta}_{\mathrm{ML}}$ 和 MM 估计量是一致的。我们可以计算 $E[y_t] = \theta^{-1}$（参考期中测验中的第三题），因此 $\hat{\theta}_{\mathrm{MM}} = 1/\bar{y}$。ML 估计量比 MM 估计量更容易计算。

正态回归模型的最大似然估计

考虑正态回归模型

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

此时 y_t 是独立样本，且服从 $N(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\boldsymbol{I})$，其密度函数是

$$f_t(y_t \mid \boldsymbol{\beta}, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(y_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2}\Big)$$

y_t 的对数似然函数是

$$\ell_t(\boldsymbol{\beta}, \sigma \mid y_t) = -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})^2$$

因此，

$$\begin{aligned}
\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma \mid \boldsymbol{y}) &= -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})^2 \\
&= -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})
\end{aligned}$$

正态回归模型的最大似然估计

为了求最大似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}}$ 和 $\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}}$，我们首先针对 $\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma \mid \boldsymbol{y})$ 求关于 σ 的一阶条件，即

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma \mid \boldsymbol{y}) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) = 0$$

可得 $\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$。然后将 $\hat{\sigma}^2(\boldsymbol{\beta})$ 带入 $\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma \mid \boldsymbol{y})$ 可得

$$\ell^c(\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{y}) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\Big(\frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})\Big) - \frac{n}{2}$$

再针对 $\ell^c(\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{y})$ 解关于 $\boldsymbol{\beta}$ 的一阶条件可得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}}$。此时 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$。

最后，$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \hat{\sigma}^2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^n \hat{u}_t$，$\hat{\sigma}_{\mathrm{ML}} = \sqrt{\hat{\sigma}^2(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}})}$。

$\boldsymbol{\beta}$ 的 ML 估计量和 OLS 估计量一致是因为我们假设了 $\boldsymbol{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$。如果换成其他分布，则这个结果不成立，此时 ML 估计量具有渐进有效性。σ^2 的 ML 估计量和 MM 估计量一致，我们已知它会低估 σ^2。

ML 估计量的统计学性质

下面我们总结 ML 估计量的统计学性质：

- 如果 ML 估计量即是可识别的又是渐进可识别的，则它是**一致**估计量。
- 如果 ML 估计量是对数似然函数的一阶条件的解（称为 Type 2 ML 估计量），则它的**极限分布是正态分布**。
- Type 2 ML 估计量在所有渐进非偏的 $\sqrt{n}$ 一致估计量中满足**渐进有效性**。（在小样本中不具有有效性）

基于似然函数的大样本检验方法

这里简单介绍三种大样本下基于最大似然估计的检验方法。设 $H_0 : \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ 中包含 r 个非线性假设。
$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\partial \ell(\boldsymbol{\theta}) \big/ \partial \theta_i\right]$ 被称为 score 函数，$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = E_{\boldsymbol{\theta}}\left[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{g}^{\top}(\boldsymbol{\theta})\right]$ 被称为 information matrix。

- Likelihood ratio test（似然比检验）

$$\mathrm{LR} \equiv 2[\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{R}}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})] = 2\log\left[L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{R}}) \big/ L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})\right] \ \overset{a}{\sim}\ \chi^2(r)$$

原理：在 H_0 下，有约束模型和无约束模型的最大似然函数值应该差不太多

- Wald test（沃尔德检验）

$$W \equiv \boldsymbol{r}^{\top}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})\left(\boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})\,\widehat{\mathrm{Var}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})\,\boldsymbol{R}^{\top}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}})\right)^{-1}\boldsymbol{r}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{U}}) \ \overset{a}{\sim}\ \chi^2(r), \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}) = \left[\partial r_i(\boldsymbol{\theta})/\partial \theta_j\right]$$

原理：在 H_0 下，无约束模型的估计量应该渐进地满足约束条件

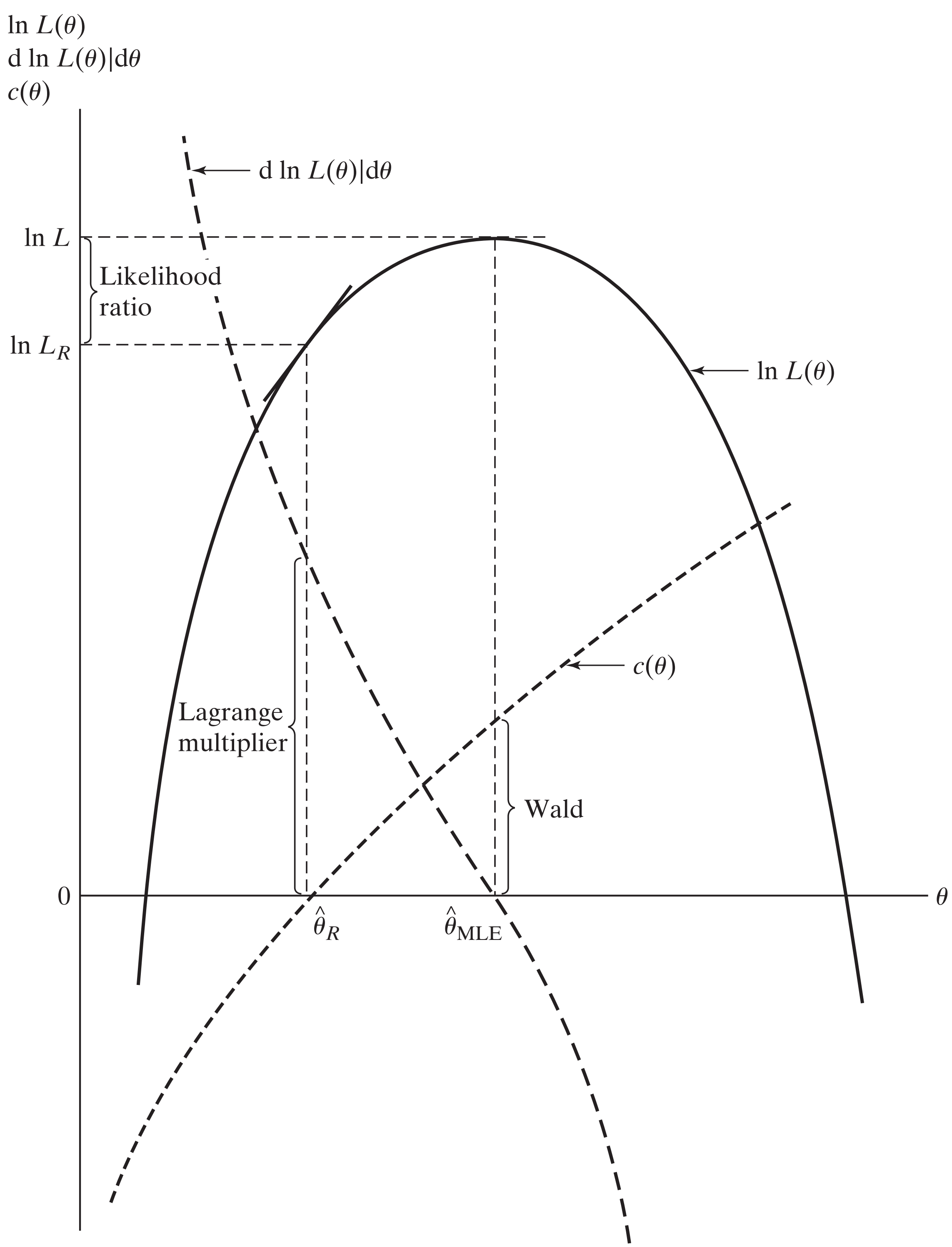
- Lagrange multiplier test（拉格朗日乘数检验）或 Rao's score test

$$\mathrm{LM} \equiv \boldsymbol{g}^{\top}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{R}})\,\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{R}})^{-1}\,\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{R}}) \ \overset{a}{\sim}\ \chi^2(r)$$

原理：在 H_0 下，有约束模型的估计量应该很接近真实值，但在 H_1 下应该差异较大

LR, W, and LM Tests

FIGURE 14.2 Three Bases for Hypothesis Tests.



- Wald 检验和 LM 检验可以看作是基于距离函数的检验。
- 三个检验统计量都渐进地服从 $\chi^2(r)$。
- 在线性模型和线性约束下，三个统计量都可以用 *F* 统计量表达，且满足

$$W > LR > LM$$

- 三个检验都是大样本检验，在小样本中的分布未知。
- 在实践中，可以根据计算的简易程度选择统计量。如果有约束模型和无约束模型都很容易估计，就可以选择 LR；如果无约束模型下的统计量相对容易计算（例如线性模型下的非线性约束），就可以选择 W；反之（例如约束条件可以消除模型的非线性）可选择 LM。

Greene (2020), p.593.

R 的典型回归结果：OLS

Kleiber & Zeileis, *Applied Econometrics with R*, Springer.: Section 3.2

```
> library(AER)
> data("CPS1988")
> cps_lm <- lm(log(wage) ~ experience + I(experience^2) + education + ethnicity, data = CPS1988)
> summary(cps_lm)

Call:
lm(formula = log(wage) ~ experience + I(experience^2) + education + ethnicity, data = CPS1988)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-2.9428 -0.3162  0.0580  0.3756  4.3830 

Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)      4.321e+00  1.917e-02  225.38   <2e-16 ***
experience       7.747e-02  8.800e-04   88.03   <2e-16 ***
I(experience^2) -1.316e-03  1.899e-05  -69.31   <2e-16 ***
education        8.567e-02  1.272e-03   67.34   <2e-16 ***
ethnicityafam   -2.434e-01  1.292e-02  -18.84   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.5839 on 28150 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3347,Adjusted R-squared:  0.3346 
F-statistic:  3541 on 4 and 28150 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

R 的典型回归结果：ML

Kleiber & Zeileis, *Applied Econometrics with R*, Springer.: Section 3.2

```
> library(stats4)
> LL <- function(beta_0, beta_ex, beta_ex2, beta_edu, beta_eth, sigma){
        -sum(dnorm(log(CPS1988$wage), (beta_0 + beta_ex*CPS1988$experience +
        beta_ex2*I(CPS1988$experience^2) + beta_edu*CPS1988$education +
        beta_eth*as.integer(CPS1988$ethnicity)), sigma, log = TRUE))
   }
> cps_ML <- mle(LL, start = list(beta_0=0, beta_ex=0, beta_ex2=0, beta_edu=0, beta_eth=0, sigma=10))
> summary(cps_ML)

Maximum likelihood estimation

Call:
mle(minuslogl = LL, start = list(beta_0 = 0, beta_ex = 0, beta_ex2 = 0,
    beta_edu = 0, beta_eth = 0, sigma = 10))

Coefficients:
             Estimate   Std. Error
beta_0    4.565599247 2.436695e-02
beta_ex   0.077455053 8.799206e-04
beta_ex2 -0.001315682 1.898479e-05
beta_edu  0.085634316 1.272004e-03
beta_eth -0.243661209 1.291627e-02
sigma     0.583852317 2.460192e-03

-2 log L: 49602.68
```

二值因变量模型

当 y 是二值变量时

二值因变量模型也称为二值响应模型（binary response model），是指因变量 $y_t \in \{0,1\}$ 的回归模型。此时，

$$E[y_t \mid \Omega_t] = \Pr(y_t = 1 \mid \Omega_t)$$

如果假设线性模型 $E[y_t \mid \Omega_t] = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}$，则无法满足概率取值在 0 和 1 之间的条件，因此通常不采用线性回归模型。

二值响应模型的一般表达为

$$E[y_t \mid \Omega_t] = F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})$$

F 称为变换函数（transformation function）

其中 F 应满足 $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1, f(x) = \frac{d}{dx}F(x) > 0$。

常用的二值响应模型包括 probit 模型和 logit 模型。

Probit 模型

Probit 模型是假设

$$F(x) = \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) dx$$

$\Phi(x)$ 是标准正态分布的 CDF

Probit 模型可以从下面的潜在变量（latent variable）模型推导出。令

$$y_t^{\circ} = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t, \quad u_t \sim \mathrm{NID}(0, 1),$$

由于无法观测 y_t° 的取值，u_t 的方差也无法识别，因此假设其为 1

并假设我们只能观测 y_t° 的符号。而 y_t 的取值定义为

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{if } y_t^{\circ} > 0 \\ 0 & \text{if } y_t^{\circ} \leq 0 \end{cases}$$

此时，

$$\begin{aligned} \Pr(y_t = 1) &= \Pr(y_t^{\circ} > 0) = \Pr(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta} + u_t > 0) \\ &= \Pr(u_t > -\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) = \Pr(u_t \leq \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) = \Phi(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

Logit 模型

Logit 模型是假设

$$F(x) = \Lambda(x) \equiv \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$\Lambda(x)$ 称为逻辑函数 logistic function

Logit 模型可以利用优势比（odds ratio，或称赔率）推导出。令

$$\log\left(\frac{\Pr(y_t \mid \Omega_t)}{1-\Pr(y_t \mid \Omega_t)}\right) = \boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta},$$

优势比就是获胜概率比上失败概率

可得

$$\Pr(y_t \mid \Omega_t) = \frac{\exp(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})} = \Lambda(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})$$

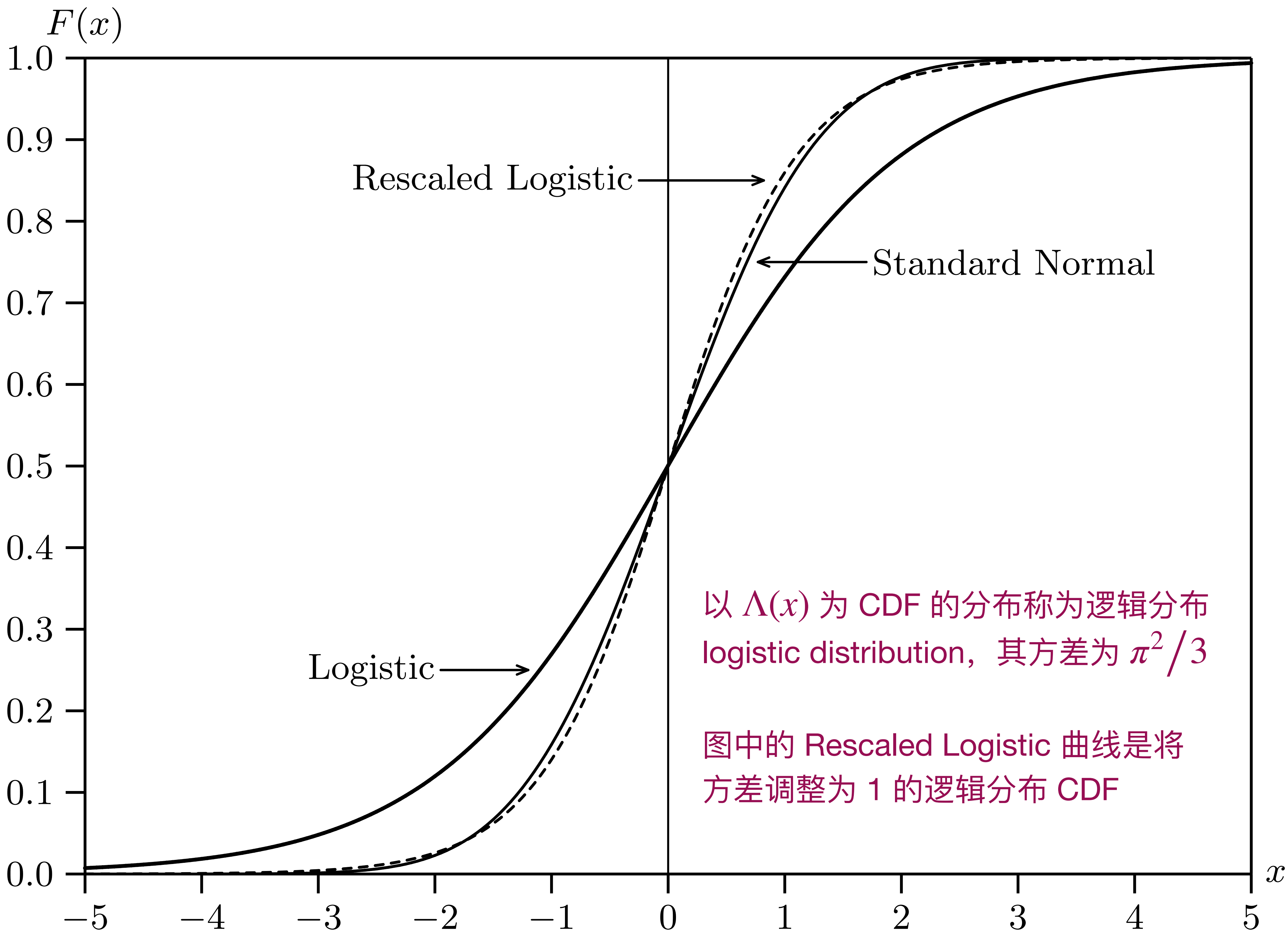


Figure 11.1 Alternative choices for $F(x)$

二值响应模型的估计

线性模型（此时称为线性概率模型 linear probability model）可以用 OLS 估计。

Probit 和 logit 模型一般用 ML 估计。由于 y_t 是离散变量，因此似然函数为概率函数而不是密度函数。根据模型的定义，

$$
\begin{aligned}
\ell_t(\boldsymbol{\beta} \mid y_t = 1) &= \log \Pr(y_t = 1 \mid \boldsymbol{\beta}) = \log F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) \\
\ell_t(\boldsymbol{\beta} \mid y_t = 0) &= \log \Pr(y_t = 0 \mid \boldsymbol{\beta}) = \log\big(1 - F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})\big)
\end{aligned}
$$

此时 $\boldsymbol{y}$ 的对数似然函数为

$$
\ell(\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{y}) = \sum_{t=1}^{n} \Big(y_t \log F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) + (1 - y_t)\log\big(1 - F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})\big) \Big)
$$

对于 probit 和 logit 模型，$\ell(\boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{y})$ 是凹函数，通过解一阶条件可以获得 ML 估计量。

一阶条件和非线性回归模型 $y_t = F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}) + v_t$ 的加权最小二乘估计的一阶条件一致，观测值 t 的权重为 $\big(F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta})(1 - F(\boldsymbol{X}_t\boldsymbol{\beta}))\big)^{-1/2}$。

R 的回归结果：probit

Gerfin, M. (1996). Parametric and semi parametric estimation of the binary response model of labour market participation. *Journal of Applied Econometric*, 11:321-340.

```
> fit_probit = glm(LFP ~ LNNLINC + AGE + I(AGE^2) + EDUC + NYC + NOC + FOREIGN,
    data = participation, family = binomial(link = "probit"))
> summary(fit_probit)

Call:
glm(formula = LFP ~ LNNLINC + AGE + I(AGE^2) + EDUC + NYC + NOC +
    FOREIGN, family = binomial(link = "probit"), data = participation)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  3.74909    1.40695   2.665  0.00771 **
LNNLINC     -0.66694    0.13196  -5.054 4.33e-07 ***
AGE          2.07530    0.40544   5.119 3.08e-07 ***
I(AGE^2)    -0.29434    0.04995  -5.893 3.79e-09 ***
EDUC         0.01920    0.01793   1.071  0.28428
NYC         -0.71449    0.10039  -7.117 1.10e-12 ***
NOC         -0.14698    0.05089  -2.888  0.00387 **
FOREIGN      0.71437    0.12133   5.888 3.92e-09 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 1203.2  on 871  degrees of freedom
Residual deviance: 1017.2  on 864  degrees of freedom
AIC: 1033.2

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

R 的回归结果：logit

Gerfin, M. (1996). Parametric and semi parametric estimation of the binary response model of labour market participation. *Journal of Applied Econometric*, 11:321-340.

```
> fit_logit = glm(LFP ~ LNNLINC + AGE + I(AGE^2) + EDUC + NYC + NOC + FOREIGN,
    data = participation, family = binomial(link = "logit"))
> summary(fit_logit)

Call:
glm(formula = LFP ~ LNNLINC + AGE + I(AGE^2) + EDUC + NYC + NOC +
    FOREIGN, family = binomial(link = "logit"), data = participation)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  6.19639    2.38309   2.600  0.00932 **
LNNLINC     -1.10409    0.22571  -4.892 1.00e-06 ***
AGE          3.43661    0.68789   4.996 5.86e-07 ***
I(AGE^2)    -0.48764    0.08519  -5.724 1.04e-08 ***
EDUC         0.03266    0.02999   1.089  0.27611
NYC         -1.18575    0.17202  -6.893 5.46e-12 ***
NOC         -0.24094    0.08446  -2.853  0.00433 **
FOREIGN      1.16834    0.20384   5.732 9.94e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 1203.2  on 871  degrees of freedom
Residual deviance: 1017.6  on 864  degrees of freedom
AIC: 1033.6

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```