

## 《高级计量经济学》2024-2025学年期中作业

回答下面的问题，将答案保存为 PDF 文档后，以电子邮件方式提交。

1.  $X$  为  $n \times k$  矩阵,  $n > k$ 。证明  $\text{rank}(X) = k \Leftrightarrow \text{rank}(X^T X) = k$ 。 [30分]
2. 证明下面的命题 [40分]
  - a. 若  $A$  是  $n \times n$  矩阵,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的  $n$  个特征值, 则  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ 。
  - b.  $X$  为  $n \times k$  矩阵,  $n > k$ 。投影矩阵  $P = X(X^T X)^{-1} X^T$  的  $n$  个特征值中有  $k$  个为 1,  $n - k$  个为 0。
3. 什么是计量经济学中常说的“多重共线性问题”? 多重共线性对线性模型系数的 OLS 估计量有什么影响? 为什么说样本量过小也会带来相同的问题? [30分]