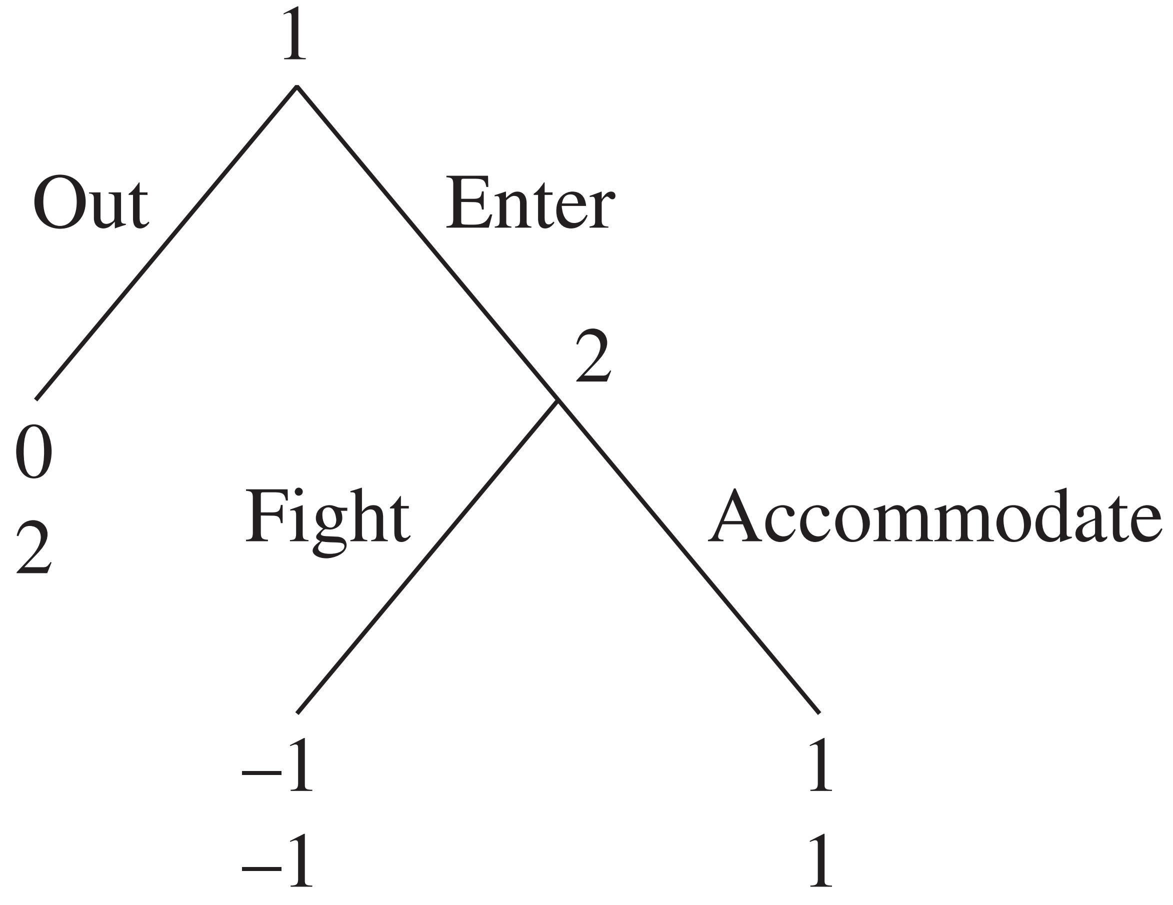
博弈论与信息经济学

7. 不完全信息动态博弈

深圳大学经济学院 会计学学术学位硕士研究生 专业选修课（2023-2024）
主讲：黄嘉平 中国经济特区研究中心讲师 工学博士 经济学博士
办公室：粤海校区汇文楼1510 Email: huangjp@szu.edu.cn

序贯理性与不完全信息

不完全信息市场进入博弈



	F	A
O	0, 2	0, 2
E	−1, −1	1, 1

- 完全信息市场进入博弈：
  - NE: (O, F), (E, A)
  - SPE: (E, A)

- 不完全信息市场进入博弈（第15章）
  - 参与人 1 有两种类型：实力强 C 和实力弱 W
  - $S_1 = \{OO, OE, EO, EE\}$, $S_2 = \{F, A\}$
  - 当 $p = 0.5$ 时，BNE: $\underline{(OO, F)}$, (EO, A)

    不可信

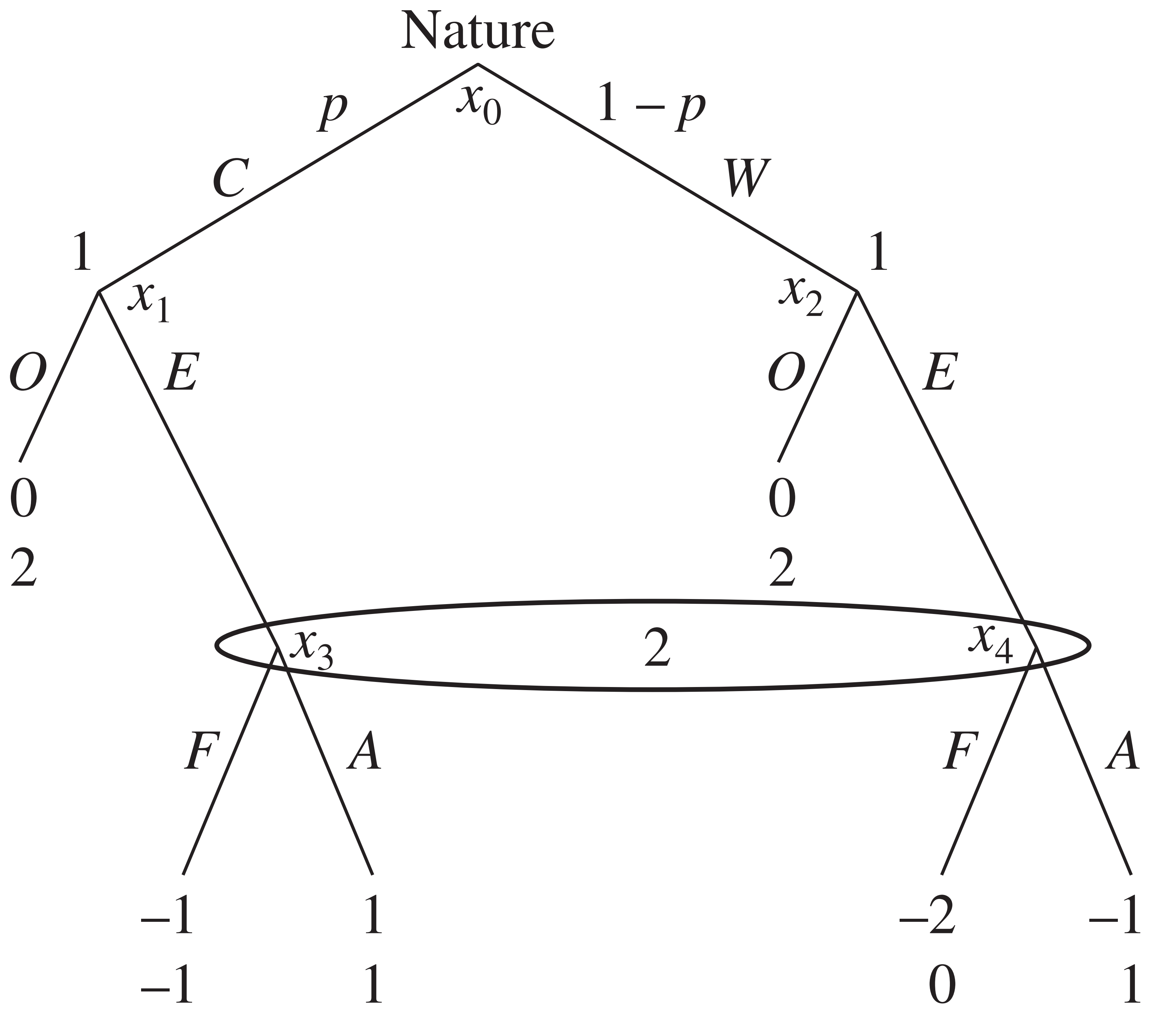


FIGURE 15.2 An entry game with incomplete information.

$p = 0.5$ 时的期望回报矩阵

	F	A
OO	$\overline{\underline{0, 2}}$	$\overline{0, 2}$
OE	$-1, 1$	$\overline{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$
EO	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\overline{\underline{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}}$
EE	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$\overline{0, 1}$

子博弈完美均衡?

- 唯一的子博弈就是原博弈本身
- 因此，(OO, F), (EO, A) 都是 SPE

- 子博弈完美均衡在不完全信息动态博弈中可能无法给出更好的解
  - 这是因为，即使参与人 2 能观察参与人 1 的行动，但是他不知道参与人 1 的类型，导致他的信息集包含多个行动节点

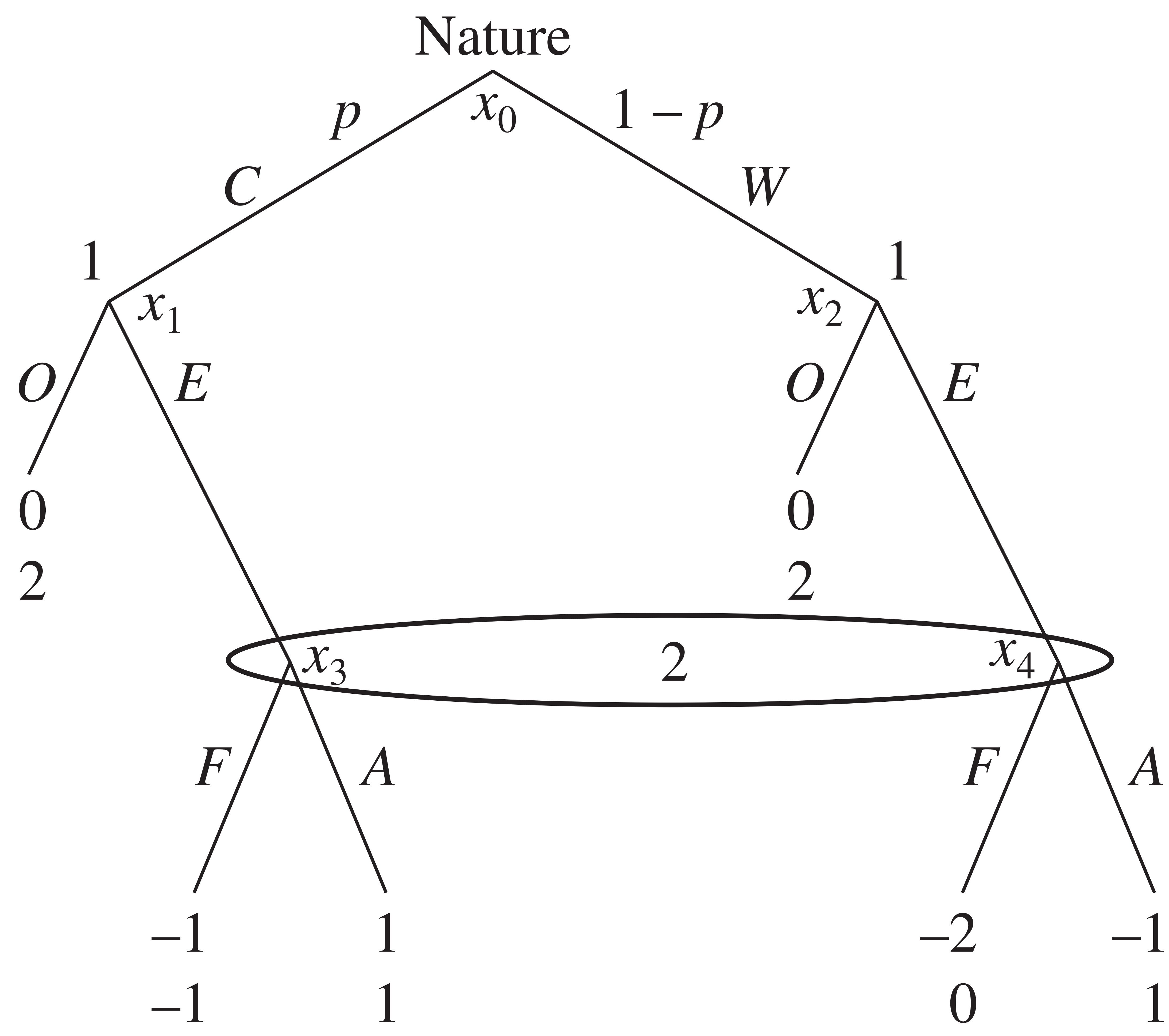


FIGURE 15.2 An entry game with incomplete information.

均衡路径

- 在完全信息博弈中，纳什均衡只关注均衡路径上的最优反应，而子博弈完美均衡也关注均衡路径外的最优反应
- 在不完全信息博弈中，我们需要对均衡路径的定义进行修正

令 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 为一个不完全信息博弈的贝叶斯纳什均衡。在给定均衡策略组合 σ^* 和参与人类型的先验分布下，如果到达一个信息集的概率为正，则称该信息集**在均衡路径上**；如果到达一个信息集的概率为零，则称该信息集**偏离了均衡路径**

- 在前面的例子中，在均衡策略 (EO, A) 和先验分布 $(p, 1-p)$ 下，到达参与人 1 的信息集 $\{x_1\}$ 和 $\{x_2\}$ 的概率分别为 p 和 $1-p$，到达参与人 2 的信息集 $\{x_3, x_4\}$ 的概率是 p（仅当参与人 1 的类型为 C 时，他会选择进入市场 E）
- 如果参与人 1 的策略是 OO，则到达参与人 2 的信息集的概率为 0

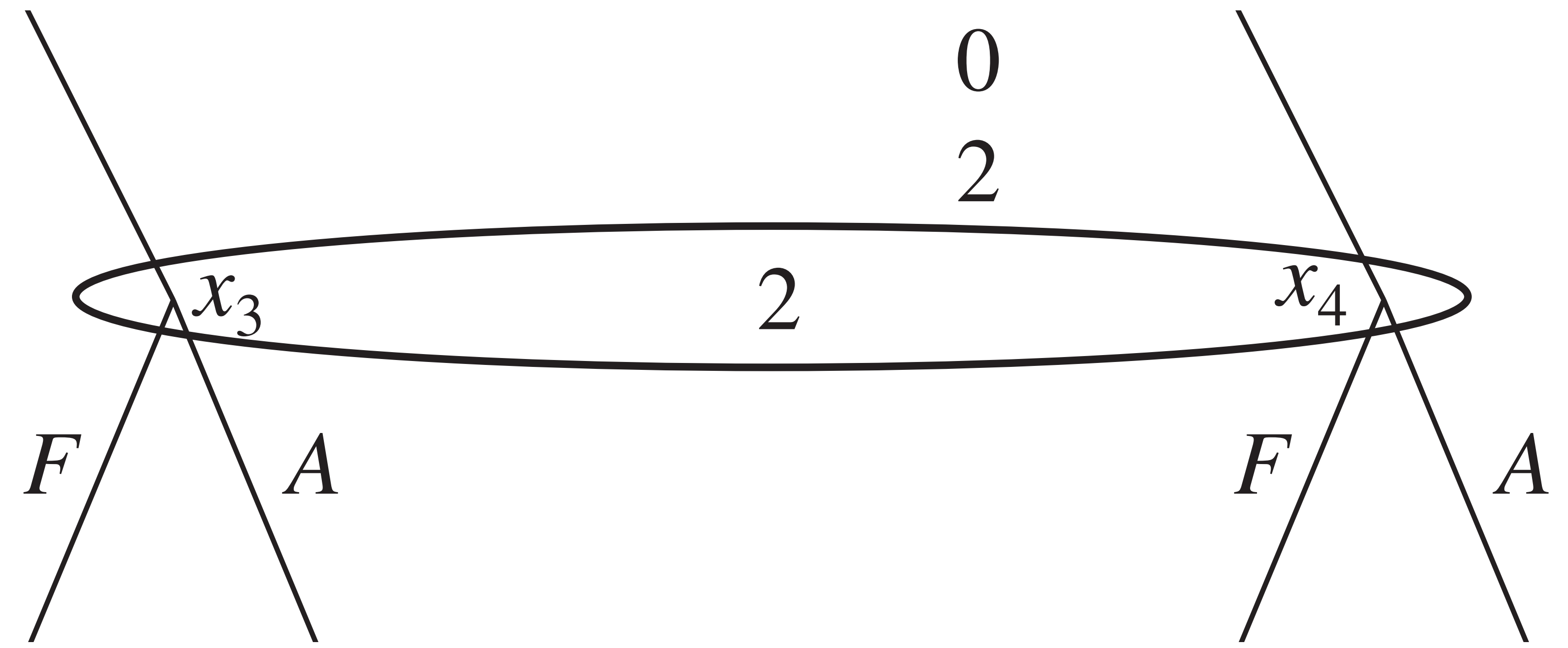
信念

Beliefs

- 为了将序贯理性的原则适用于贝叶斯纳什均衡，我们需要要求参与人在每个信息集都做选择最优反应。→ 针对什么的最优反应?
- 当信息集不是单点时，以该信息集中节点为根的部分博弈树不是子博弈，因此最优反应的对象不是对手的纯策略组合。我们需要定义参与人在自己信息集内部的信念

扩展式博弈中的**信念系统（system of beliefs）**μ 给每个信息集指定了一个概率分布。即针对每个信息集 $h \in H$，该信息集上的每个节点 $x \in h$，$\mu(x) \in [0,1]$ 给出了在该信息集行动的参与人认为自己身处节点 x 的概率。因此 $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$ 对任意 h 成立

- 在前面的例子中，参与人 2 的信息集中有两个节点 x_3 和 x_4，因此 $\mu(x_3) + \mu(x_4) = 1$，分别代表在参与人 1 选择了 E 时，参与人 2 认为参与人 1 的类型是 C 和 W 的概率



均衡应满足的条件（一）

[R1] 每个参与人在自己行动的每一个信息集都应该有正确定义的信念。即该博弈存在一个信念系统

- 那么，信念系统是可以任意定义的吗?
  - 参与人的信念受策略组合（其他参与人的行动）和先验分布（“自然”的行动）的双重影响
  - 例如 $\mu(x_3) = \Pr[\theta_1 = C \mid a_1 = E]$，如果参与人 1 的策略是 EO，则 $\mu(x_3) = 1$
  - 如果参与人 1 的策略是“当 $\theta_1 = C$ 时以 σ_C 的概率选择 E，当 $\theta_1 = W$ 时以 σ_W 的概率选择 E”，则

这是一个行为策略

$$\mu(x_3) = \Pr[\theta_1 = C \mid a_1 = E]$$
$$= \frac{\Pr[\theta_1 = C, a_1 = E]}{\Pr[\theta_1 = C, a_1 = E] + \Pr[\theta_1 = W, a_1 = E]} = \frac{p\sigma_C}{p\sigma_C + (1-p)\sigma_W}$$

[R2] 给定任意贝叶斯纳什均衡，每一个在均衡路径上的信息集上的信念都应满足贝叶斯公式

均衡应满足的条件（二）

- 均衡路径外的信息集怎么办?
  - 当参与人 1 选择策略 OO 时（即 $\sigma_C = \sigma_W = 0$），$\mu(x_3) = \dfrac{p\sigma_C}{p\sigma_C + (1-p)\sigma_W} = \dfrac{0}{0}$，因此无法通过贝叶斯公式定义参与人 2 的信息集上的信念（到达此信息集的概率为零）

[R3] 对于偏离均衡路径的信息集，贝叶斯公式不适用，该信息集上的信念可以是任意概率分布

[R4] 在给定一个信念系统时，参与人的策略应满足序贯理性原则。即在每一个信息集上，参与人都根据自己的信念针对后续策略选择最优反应：

具有信念 μ 的参与人 i 在信息集 h 时，其策略 σ_i 是 σ_{-i} 的最优反应的定义为 $\mathrm{E}_\mu\left[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}; \theta_i) \mid h, \mu\right] \geq \mathrm{E}_\mu\left[v_i(s_i', \sigma_{-i}; \theta_i) \mid h, \mu\right]$

- 参与人 2 在自己的信息集时，
  - $\mathrm{E}_\mu\left[v_2(EO, A) \mid \mu\right] = \mu(x_3) \times 1 + \mu(x_4) \times 1 = 1$，$\mathrm{E}_\mu\left[v_2(EO, F) \mid \mu\right] = \mu(x_3) \times (-1) + \mu(x_4) \times 0 = -1$，因此 A 是 EO 的最优反应
  - $\mathrm{E}_\mu\left[v_2(OO, F) \mid \mu\right] = \mu(x_3) \times (-1) + \mu(x_4) \times 0 = -\mu(x_3)$，$\mathrm{E}_\mu\left[v_2(OO, A) \mid \mu\right] = \mu(x_3) \times 1 + \mu(x_4) \times 1 = 1$，因此 F 不是 OO 的最优反应

完美贝叶斯均衡

Perfect Bayesian equilibrium

贝叶斯纳什均衡 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 和信念系统 μ 的组合 (σ^*, μ) 如果满足条件 **[R1]**∼**[R4]**，则称其为**完美贝叶斯均衡**（perfect Bayesian equilibrium），简写为 PBE

- PBE 保证均衡满足序贯理性原则
- 如何找到 PBE?
  - 首先找到全部 BNE
  - 然后针对每一个 BNE，尝试寻找符合 PBN 的信念系统

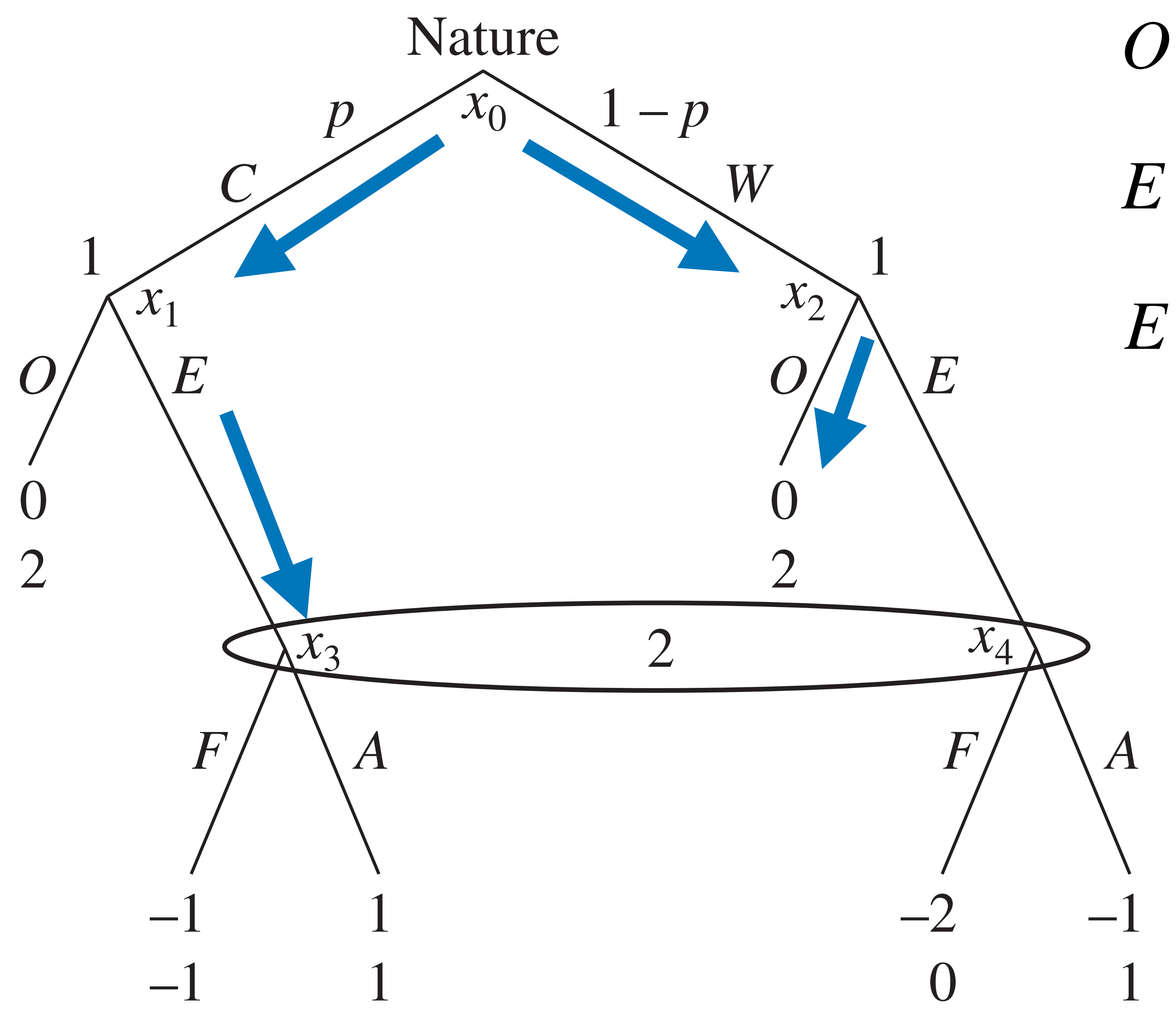
定理：如果策略 $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ 是贝叶斯博弈 Γ 的贝叶斯纳什均衡，且在 σ^* 下到达任意信息集的概率都为正，则 σ^* 和先验分布 F 可以定义唯一的信念系统 μ^* （适用贝叶斯公式），并使 (σ^*, μ^*) 成为 Γ 的完美贝叶斯均衡

- 纯策略 BNE：(OO, F), (EO, A)
- 已知在 (OO, F) 下无法到达信息集 $\{x_2, x_3\}$，且对任意信念 $(\mu(x_3), \mu(x_4))$ F 都不是参与人 2 的最优反应
- 在 (EO, A) 下到达 $\{x_2, x_3\}$ 的概率为 $p = 0.5$，且根据贝叶斯公式可得 $\mu(x_3) = 1$

$$E_\mu[v_2(EO, A) \mid \mu] = 1,$$
$$E_\mu[v_2(EO, F) \mid \mu] = -1,$$

因此 A 是参与人 2 的最优反应

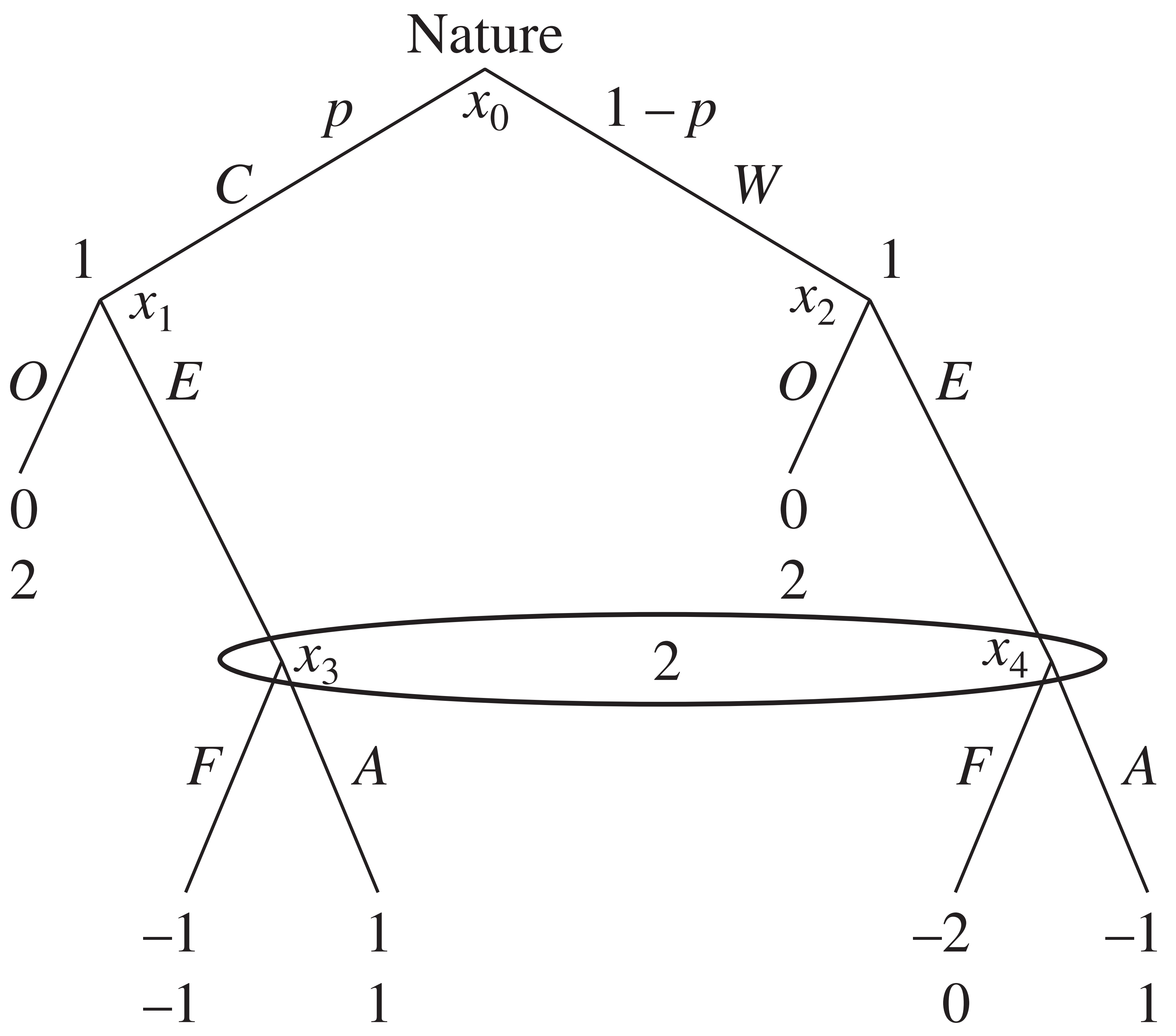
- 纯策略 PBE：$s = (EO, A)$, $\mu_{\{x_3, x_4\}} = (1, 0)$



$p = 0.5$ 时的期望回报矩阵

	F	A
OO	$0, 2$	$0, 2$
OE	$-1, 1$	$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
EO	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
EE	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$0, 1$

行为策略 BNE



- 令参与人 1 的行为策略 σ_1 为：

$$\begin{cases} \text{在 } x_1 \text{ 时以 } \sigma_C \text{ 的概率选择 } E \\ \text{在 } x_2 \text{ 时以 } \sigma_W \text{ 的概率选择 } E \end{cases}$$

- 令参与人 2 的行为策略 σ_2 为：

  选择 A 的概率为 δ

- 双方的事前期望回报

$$\begin{aligned} V_1(\sigma_1,\sigma_2) &= p\Big[(1-\sigma_C)\cdot 0+\sigma_C\big(\delta\cdot 1+(1-\delta)\cdot(-1)\big)\Big] + (1-p)\Big[(1-\sigma_W)\cdot 0+\sigma_W\big(\delta\cdot(-1)+(1-\delta)\cdot(-2)\big)\Big] \\ &= p\sigma_C(2\delta-1)+(1-p)\sigma_W(\delta-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(\sigma_1,\sigma_2) &= p\Big[(1-\sigma_C)\cdot 2+\sigma_C\big(\delta\cdot 1+(1-\delta)\cdot(-1)\big)\Big] + (1-p)\Big[(1-\sigma_W)\cdot 2+\sigma_W\big(\delta\cdot 1+(1-\delta)\cdot 0\big)\Big] \\ &= p(2-3\sigma_C)+2(1-p)(1-\sigma_W)+\big(2p\sigma_C+(1-p)\sigma_W\big)\cdot\delta \end{aligned}$$

行为策略 BNE

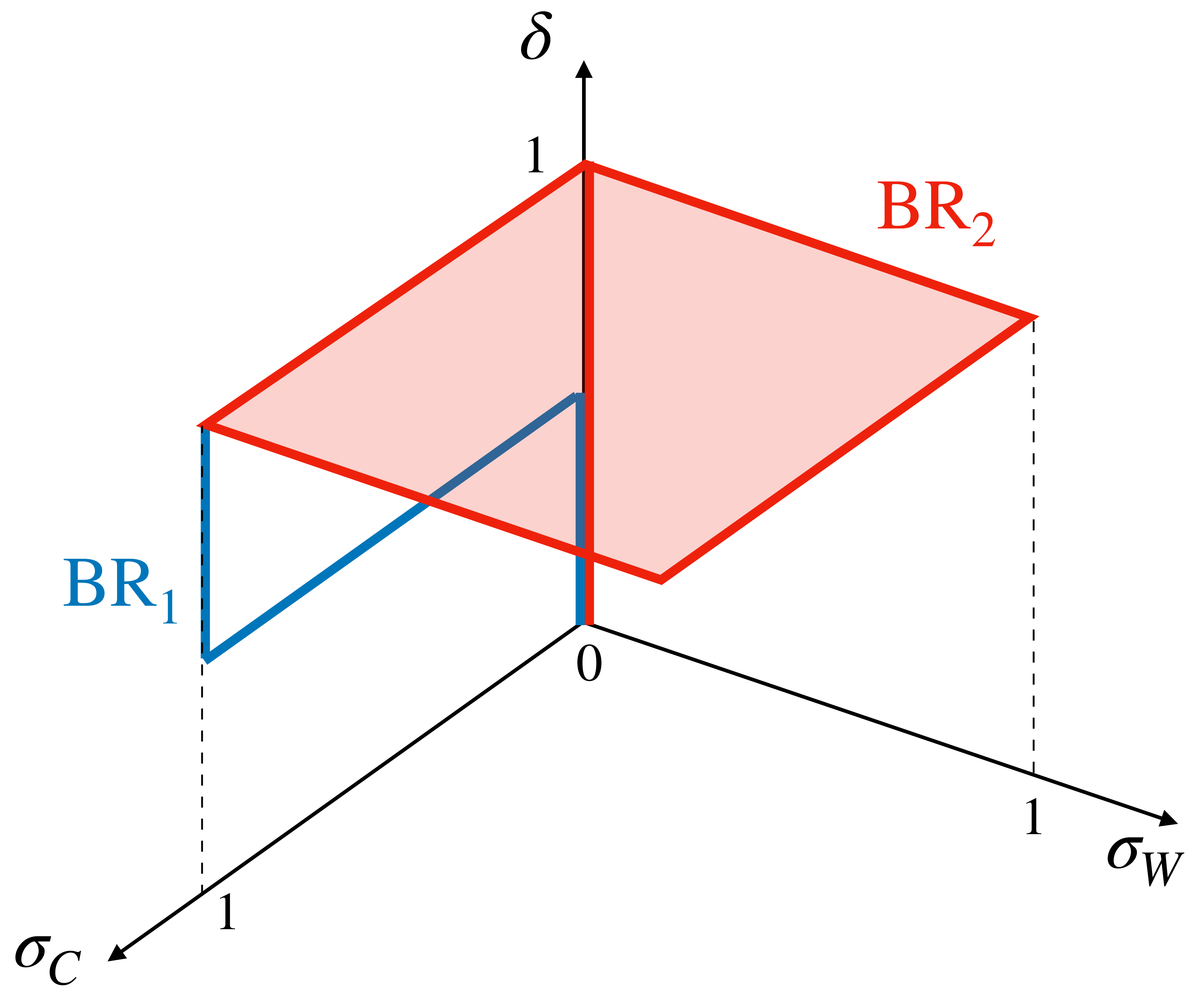
- 当 $p \in (0,1)$ 时，双方的最优反应对应为

$$V_1(\sigma_1, \sigma_2) = p\sigma_C(2\delta - 1) + (1-p)\sigma_W(\delta - 2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{BR}_1(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_C = 1, \sigma_W = 0 & \text{if } \delta > \frac{1}{2} \\ \sigma_C \in [0,1], \sigma_W = 0 & \text{if } \delta = \frac{1}{2} \\ \sigma_C = 0, \sigma_W = 0 & \text{if } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$V_2(\sigma_1, \sigma_2) = p(2 - 3\sigma_C) + 2(1-p)(1-\sigma_W) + \big(2p\sigma_C + (1-p)\sigma_W\big) \cdot \delta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{BR}_2(\sigma_1) = \begin{cases} \delta = 1 & \text{if } (\sigma_C, \sigma_W) \neq (0,0) \\ \delta \in [0,1] & \text{if } (\sigma_C, \sigma_W) = (0,0) \end{cases}$$



行为策略 PBE 仍为 (EO, A)，因为当参与人 1 选择 OO 时，无法到达信息集 $\{x_3, x_4\}$，而在任意信念下，参与人 2 在 $\{x_3, x_4\}$ 的最优选择都是 A

- 可得 BNE 为：$(\sigma_C, \sigma_W, \delta) = (1,\ 0,\ 1)$，　$(\sigma_C, \sigma_W, \delta) \in \big\{(0,\ 0,\ \delta) : \delta \in [0,\ 0.5]\big\}$

即 (EO, A)　　包含 (OO, F)

练习：PBE

考虑右图中的博弈

1. 纯策略 BNE
   - $N = \{1,2\}$, $S_1 = \{A, B, C\}$, $S_2 = \{L, M, R\}$
   - 写出博弈矩阵，并找到纳什均衡

2. 纯策略 PBE
   - 考虑参与人 2 在信息集 $\{x_2, x_3\}$ 的最优对应

3. 混合策略 $s_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $s_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ 和信念 $\mu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 能构成 PBE 吗？（课后练习）