高级计量经济学

Lecture 12: Selection on Observables

黄嘉平

工学博士 经济学博士
深圳大学中国经济特区研究中心 讲师

办公室　粤海校区汇文楼1510
E-mail　huangjp@szu.edu.cn
Website　https://huangjp.com

用回归方法估计 ATE

Using Regression under Random Assignment

假设个体处理效应是恒定的（没有个体间差异），即 $Y_{1i} - Y_{0i} = \rho$。此时的估计目标就变成了参数 ρ。

考虑下面的回归模型

$$Y_i^{\text{obs}} = \alpha + \rho W_i + \varepsilon_i$$

其中 $\alpha = E[Y_{0i}]$, $\varepsilon_i = Y_{0i} - E[Y_{0i}]$。由此模型可得

$$E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 1] = \alpha + \rho + E[\varepsilon_i \mid W_i = 1]$$
$$E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 0] = \alpha + E[\varepsilon_i \mid W_i = 0]$$

取两式之差可得

$$\tau^{\text{diff}} = \rho + \text{选择偏差}$$

在随机分配机制下，选择偏差为零，$\tau^{\text{diff}} = \rho = \tau_{\text{ATE}} = \tau_{\text{ATET}}$。平均处理效应可以用回归系数的 OLS 估计量来估计，即 $\hat{\tau}_{\text{ATE}} = \hat{\tau}_{\text{ATET}} = \hat{\rho}_{\text{OLS}}$。

回归方法的优点是可以方便地加入其他控制变量，并可以很容易地拓展到多值处理变量。缺点是需要假设处理效应不存在个体差异。

干扰

Confounding

和回归分析类似，在潜在结果模型中，处理变量和潜在结果变量也可能受到其他因素的影响，我们称其为干扰（confounding）。

如果干扰以变量的形式存在，我们将其称为干扰变量（confounding variables, confounders）或者协变量（covariates），记为 $\boldsymbol{X}_i$。协变量的存在可能威胁到独立性假设 (Y_{1i}, Y_{0i}) 丄 W_i 的正当性，从而影响平均处理效应的估计。

当协变量可观测时，我们可以考虑下面的替代条件

- 条件独立假设（conditional independence assumption, CIA）：
$$(Y_{1i}, Y_{0i}) \perp\!\!\!\perp W_i \mid \boldsymbol{X}_i$$
- 条件均值独立假设（conditional mean independence, CMI）：
$$E[Y_{1i} \mid W_i, \boldsymbol{X}_i] = E[Y_{1i} \mid \boldsymbol{X}_i], \quad E[Y_{0i} \mid W_i, \boldsymbol{X}_i] = E[Y_{0i} \mid \boldsymbol{X}_i]$$

CMI 弱于 CIA，下面为了方便我们都假设 CIA。

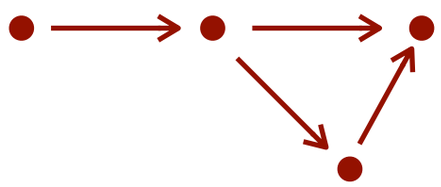
令 $\tau^{\text{diff}}(\boldsymbol{X}_i) = E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 1, \boldsymbol{X}_i] - E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 0, \boldsymbol{X}_i]$，则 $\tau^{\text{diff}}(\boldsymbol{X}_i)$ 是控制协变量后的平均处理效应。整体平均处理效应可以用 $\tau^{\text{diff}}(\boldsymbol{X}_i)$ 计算。

由于 CIA 和 CMI 基于协变量的可观测性，因此也被称为 selection on observables 条件。

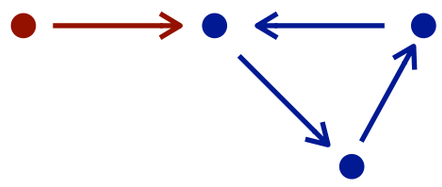
用有向无环图表达因果关系

Directed Acyclic Graph (DAG) Representation

Pearl (2000) 提倡用有向无环图（directed acyclic graph, DAG）表达潜在结果模型中的因果关系。



有向图（directed graph）

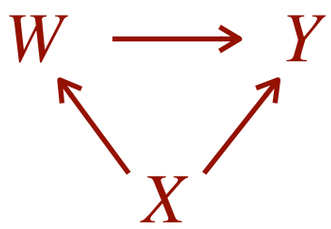


环（cycle）

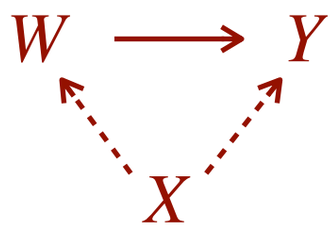
我们可以用图中的节点代表变量，用边代表因果关系的方向。例如 $W \rightarrow Y$ 代表 W 引起了 Y 的变化（W causes Y），W 为因 Y 为果。

注意：这里 W 的变化应是人为干预（intervention）引起的

如果存在同时影响 W 和 Y 的协变量 X，则 DAG 可以表达为



X 可观测



X 不可观测

注意：如果两个节点间没有边连接，则代表二者间**不存在**直接因果关系。

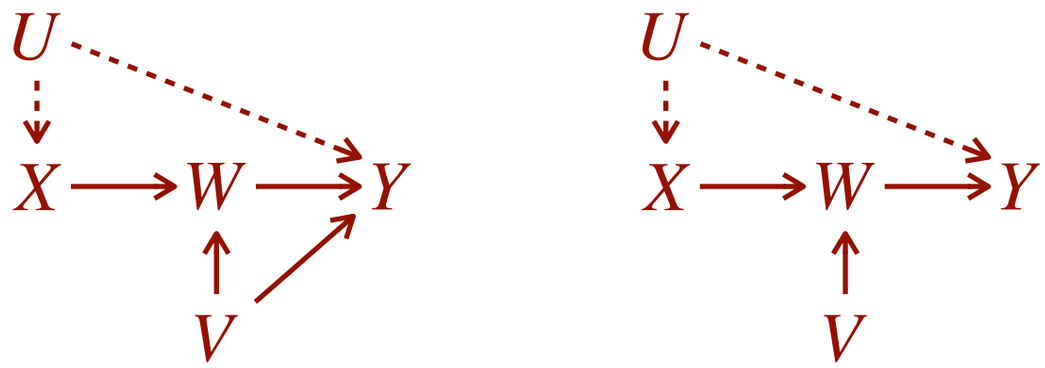
Pearl (2000, 2009). Causality: Models, Reasoning, and Inference, 1st & 2nd Edition. Cambridge University Press.

基于可观测协变量的识别

Identification under Selection on Observables

下面以奖学金和学习成绩间的因果效应问题为例。设处理变量 W 为奖学金获得情况，潜在结果 Y 为奖学金发放后的学生成绩，协变量包括 X（入学时的成绩），U（入学前的学术能力），V（学生的个人特征等）。

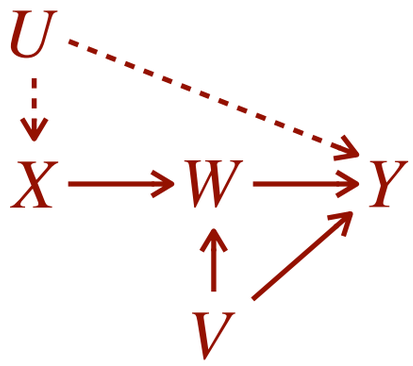
可以考虑右侧两种模型：

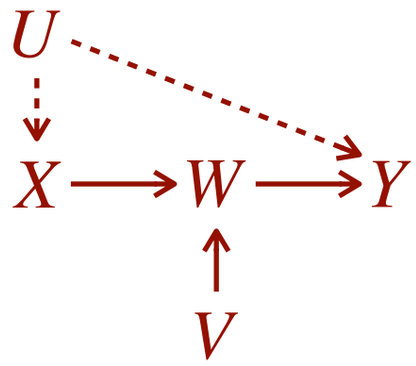


因果效应（直接或间接）可以用图中的路径（path）表达。例如 $X \to W \to Y$ 代表 X 通过 W 对 Y 产生因果效应。模型中是否存在干扰可以通过是否存在后门路径（backdoor path）判断

- 后门路径：连接处理变量 W 和结果变量 Y 的路径中，存在指向 W 的边。

图中的 $W \leftarrow X \leftarrow U \to Y$ 和 $W \leftarrow V \to Y$ 是后门路径。如果模型中存在后门路径，则可能存在干扰，使 τ^{diff} 包含选择偏差。





在 CIA 条件 (Y_1, Y_0) 丄 $W \mid X$ 成立时，我们可以通过控制协变量 X 阻断后门路径 $W \leftarrow X \leftarrow U \rightarrow Y$ 的发生。

路径中如果存在**不变的**变量，则该路径被阻断

另外，我们假设下面的条件成立：

- 共同支撑假设（common support assumption）或重叠假设（overlap）：$0 < \Pr(W = 1 \mid X) < 1$

此时，

$$
\begin{aligned}
E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid X_i] &= E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 1, X_i] - E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 0, X_i] \\
&= \tau^{\text{diff}}(X_i)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\tau_{\text{ATE}} &= E_X\big[E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid X_i]\big] = E[\tau^{\text{diff}}(X_i)] \\
\tau_{\text{ATET}} &= E_X\big[E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid X_i] \mid W_i = 1\big] = E[\tau^{\text{diff}}(X_i) \mid W_i = 1]
\end{aligned}
$$

在上面的两个模型中，后门路径 $W \leftarrow X \leftarrow U \rightarrow Y$ 可以通过控制 X 或 U 阻断，但是 $W \leftarrow V \rightarrow Y$ 只能通过控制 V 阻断。

如果 V 不可观测，则上图左侧的模型无法对因果效应进行识别，右侧的则可以。

以上例子取自 Abadie & Catteneo (2018). Econometric Methods for Program Evaluation. *Annual Review of Economics*, 10, 465-503.

选择偏差的分解*

Decomposition of Selection Bias*

Heckman et al. (1998) 对选择偏差 $E[Y_{0i} \mid W_i = 1] - E[Y_{0i} \mid W_i = 0]$ 进行了分解。他们得出

$$\text{选择偏差} = B_1 + B_2 + B_3$$

- B_1：来源于弱重叠（weak overlap）的偏差。
  如果存在 $\Pr(W = 1 \mid X = x) = 0, \Pr(W = 0 \mid X = x) > 0$ 或 $\Pr(W = 0 \mid X = x) = 0, \Pr(W = 1 \mid X = x) > 0$ 的 x，此时针对这个 x 无法进行处理组与对照组间的比较。
- B_2：来源于弱平衡（weak balance）的偏差。
  如果存在 $\Pr(W = 1 \mid X = x) \neq \Pr(W = 0 \mid X = x)$ 的 x，则关于这个 x，处理组与对照组中的观测值数量不同，会造成估计偏差。
- B_3：来源于不可观测协变量的偏差（selection on unobservables）。
  如果存在不可观测的协变量，则 CIA 或 CMI 不成立。（类似于回归分析中的遗漏变量偏差）

Heckman, Ichimura, Smith, & Todd (1998). Characterizing Selection Bias Using Experimental Data. *Econometrica*, 66:5, 1017-1098.

Methods under Selection on Observables

匹配估计量（加权）

Matching Estimator (Weighting)

假设只存在一个可观测协变量 X_i ，且 X_i 取离散值 $x_1, \ldots, x_m$。同时假设 CIA 和共同支撑假设成立。

前面定义了 $\tau^{\text{diff}}(X_i) = E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 1, X_i] - E[Y_i^{\text{obs}} \mid W_i = 0, X_i]$，因此 ATE 和 ATET 可以表达为

$$\begin{aligned}\tau_{\text{ATE}} &= E[Y_{1i} - Y_{0i}] = E\Big[E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid X_i]\Big] \\ &= E[\tau^{\text{diff}}(X_i)] = \sum_{k=1}^{m} \tau^{\text{diff}}(x_k) \Pr(X_i = x_k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\text{ATET}} &= E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid W_i = 1] = E\Big[E[Y_{1i} - Y_{0i} \mid X_i] \mid W_i = 1\Big] \\ &= E[\tau^{\text{diff}}(X_i) \mid W_i = 1] = \sum_{k=1}^{m} \tau^{\text{diff}}(x_k) \Pr(X_i = x_k \mid W_i = 1)\end{aligned}$$

根据等式最右侧的表达式可知，平均处理效应是条件均值之差 $\tau^{\text{diff}}(X_i)$ 的加权平均。

样本中对应 $\tau^{\text{diff}}(x_k)$ 的是 $\hat{\tau}^{\text{diff}}(x_k) = \frac{1}{n_{1k}} \sum_{j=1}^{n_{1k}} y_{1j}^{\text{obs}} - \frac{1}{n_{0k}} \sum_{j=1}^{n_{0k}} y_{0j}^{\text{obs}}$，而用作权重的概率也可以由样本提供的经验分布计算。因此平均处理效应的估计量是

$$\hat{\tau}_{\text{ATE}} = \sum_{k=1}^{m} \hat{\tau}^{\text{diff}}(x_k)\, p_k, \quad \hat{\tau}_{\text{ATET}} = \sum_{k=1}^{m} \hat{\tau}^{\text{diff}}(x_k)\, p_{k|W_i=1}$$

文献中称这种估计量为匹配估计量（matching estimator）或 subclassification。

回归调整

Regression Adjustment

令 D_{ik} 为 $X_i = x_k$ 时取值为 1 的虚拟变量。如果假设个体处理效应恒定，则可以考虑下面的回归模型

$$Y_i^{\text{obs}} = \rho W_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_k D_{ik} + \varepsilon_i$$

Angrist & Pischke (2009) 应用 FWL 定理得出 ρ_{OLS} 可以表达为

$$\rho_{\text{OLS}} = \sum_{k=1}^{m} \tau^{\text{diff}}(x_k)\, \omega_k, \quad \omega_k = \frac{\text{Var}[W_i \mid X_i = x_k]\Pr(X_i = x_k)}{\sum_{r=1}^{m} \text{Var}[W_i \mid X_i = x_k]\Pr(X_i = x_r)}$$

因此，$\hat{\rho}_{\text{OLS}}$ 是用条件方差进行加权的匹配估计量。只有当 $\tau^{\text{diff}}(x_k) = \tau^{\text{diff}}$ （不随 x_k 的取值而改变），或 $\omega_k = p_k$ 时，$\hat{\rho}_{\text{OLS}}$ 才能正确估计 ATE 和 ATET。然而实践中，这两个条件都很难成立。

因为 $W_i \in \{0,1\}$，其条件方差是

$$\text{Var}[W_i \mid X_i = x_k] = \Pr(W_i = 1 \mid X_i = x_k)\big(1 - \Pr(W_i = 1 \mid X_i = x_k)\big)$$

因此当 $\Pr(W_i = 1 \mid X_i = x_k) = \frac{1}{2}$ 时取最大值，此时回归赋予 $\tau^{\text{diff}}(x_k)$ 的权重最大。

Angrist & Pischke (2009). *Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist's Companion*. Princeton University Press.

匹配是相似个体间的比较

Dale, S. B. & Krueger, A. (2002). Estimating the payoff to attending a more selective college: an application of selecting on observables and unobservables. *QJE*, 117(4): 1491—1527.

TABLE 2.1
The college matching matrix

Applicant group	Student	Private			Public			1996 earnings
		Ivy	Leafy	Smart	All State	Tall State	Altered State	
A	1		Reject	Admit		Admit		110,000
	2		Reject	Admit		Admit		100,000
	3		Reject	Admit		Admit		110,000
B	4	Admit			Admit		Admit	60,000
	5	Admit			Admit		Admit	30,000
C	6		Admit					115,000
	7		Admit					75,000
D	8	Reject			Admit	Admit		90,000
	9	Reject			Admit	Admit		60,000

Note: Enrollment decisions are highlighted in gray.

表取自 Angrist & Pischke (2015). *Mastering 'Metrics*. PUP.

读私立大学比读公立大学更能带来高收入吗?

均值的比较:

$$\begin{aligned}&\overline{w}_{\text{Pri}} - \overline{w}_{\text{Pup}}\\ &= \$92{,}000 - \$72{,}500\\ &= \$19{,}500\end{aligned}$$

$A \sim D$ 组分别代表志愿和录取结果相似的学生，从表中可以看出，C 组和 D 组只包含处理组和对照组其中之一。

基于 A 组和 B 组中的样本可得

$$\begin{aligned}\Delta\overline{w}_A &= -\$5{,}000\\ \Delta\overline{w}_B &= \$30{,}000\end{aligned}$$

由此计算的匹配估计值为

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{\text{ATE}} &= \tfrac{3}{5}\Delta\overline{w}_A + \tfrac{2}{5}\Delta\overline{w}_B\\ &= \$9{,}000\end{aligned}$$

匹配与回归

Applicant group	Student	Private: Ivy	Private: Leafy	Private: Smart	Public: All State	Public: Tall State	Public: Altered State	1996 earnings
A	1		Reject	Admit		Admit		110,000
	2		Reject	Admit		Admit		100,000
	3		Reject	Admit		Admit		110,000
B	4	Admit			Admit		Admit	60,000
	5	Admit			Admit		Admit	30,000

如果用回归方法，可以考虑包含私立学校虚拟变量和 A 组虚拟变量的模型

$$W_i = \alpha + \beta P_i + \gamma A_i + u_i$$

此时，$\alpha = E[W_i \mid \text{Public}, B]$，$\alpha + \beta = E[W_i \mid \text{Private}, B]$，
$\alpha + \gamma = E[W_i \mid \text{Public}, A]$，$\alpha + \beta + \gamma = E[W_i \mid \text{Private}, A]$。

平均处理效应为 $\tau_{\text{ATE}} = \beta$，其估计值是 $\hat{\tau}_{\text{ATE}} = \$10{,}000$。与匹配估计值的差异是因为回归用了不同的权重进行加权。

近邻匹配

Nearest-Neighbor Matching

前面介绍的匹配估计量是组间的匹配（控制协变量 $X_i = x_k$ 时，处理组与对照组间的均值比较）。匹配也可以在个体层面实现。

个体处理效应可以表达为

$$\begin{aligned}\tau_i = Y_{1i} - Y_{0i} &= \begin{cases} Y_i^{\text{obs}} - Y_i^{\text{mis}} \text{ if } W_i = 1 \\ Y_i^{\text{mis}} - Y_i^{\text{obs}} \text{ if } W_i = 0 \end{cases} \\ &= W_i(Y_i^{\text{obs}} - Y_i^{\text{mis}}) + (1 - W_i)(Y_i^{\text{mis}} - Y_i^{\text{obs}})\end{aligned}$$

我们可以用下面的办法对 Y_i^{mis} 进行估计：

1. 针对每个处理组中的 i，从对照组中找到使 $\|X_i - X_j\|$ 最小的 j，并令 $\hat{Y}_i^{\text{mis}} = Y_{j(i)}^{\text{obs}}$；
2. 针对每个对照组中的 i，从处理组中找到使 $\|X_i - X_j\|$ 最小的 j，并令 $\hat{Y}_i^{\text{mis}} = Y_{j(i)}^{\text{obs}}$；
3. 计算个体处理效应的估计量 $\hat{\tau}_i = W_i(Y_i^{\text{obs}} - \hat{Y}_i^{\text{mis}}) + (1 - W_i)(\hat{Y}_i^{\text{mis}} - Y_i^{\text{obs}})$；
4. $\hat{\tau}_{\text{ATET}} = \frac{1}{N_1}\sum_{i:W_i=1}\hat{\tau}_i$，$\hat{\tau}_{\text{ATEC}} = \frac{1}{N_0}\sum_{i:W_i=0}\hat{\tau}_i$，$\hat{\tau}_{\text{ATE}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\tau}_i = \frac{1}{N}(N_1\hat{\tau}_{\text{ATET}} + N_0\hat{\tau}_{\text{ATEC}})$。

这种匹配方法被称为近邻匹配（nearest-neighbor matching）。其优点是可以直接对应协变量为连续值或多变量的情况。近邻匹配有很多变种，比如考虑可重复或不可重复抽样，用多个匹配值计算 $\hat{Y}_i^{\text{mis}}$（取其均值），用不同的距离函数等。

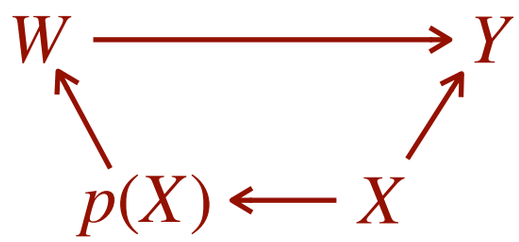
倾向得分匹配

Matching using Propensity Scores

倾向得分（propensity score）是个体接受处理的条件概率，即

$$p(X_i) = \Pr(W_i = 1 \mid X_i)$$

Rosenbaum & Rubin (1983) 证明，在 CIA 和共同支撑假设成立的情况下，我们可以将假设中基于协变量 X_i 的部分置换成倾向得分 $p(X_i)$，置换后的假设仍然成立。这说明，控制倾向得分和控制协变量都能够起到阻断后门路径的作用。



因此，我们可以将倾向得分运用到匹配中：

1. 针对 X_i 的每个取值 x_k，估计倾向得分 $\hat{p}(x_k)$；
2. 用 $\hat{p}(x_k)$ 替代 x_k 进行匹配。

注意：也有观点认为将倾向得分用于匹配会造成数据失衡、减小估计效率、增加估计偏差等问题。
King & Nielsen (2019). Why Propensity Scores Should Not Be Used For Matching. *Political Analysis*, 27:435-454.

Rosenbaum & Rubin (1983). The central role of the propensity score in observational studies for causal effects. *Biometrika*, 70:1, 41-55.

逆概率加权法

Inverse Probability Weighting

逆概率加权法（inverse probability weighting）是另一种利用倾向得分估计平均处理效应的方法。

Hirano et al. (2003) 分析了下面的加权估计量

$$\hat{\tau}^{\text{ipw}}_{\text{ATE}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{W_i Y_i^{\text{obs}}}{\hat{p}(X_i)} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(1-W_i)Y_i^{\text{obs}}}{1-\hat{p}(X_i)}$$

当某个 $\hat{p}(x_k)$ 的取值不等于 1/2 时，说明该 x_k 在处理组和对照组中存在弱平衡，可能导致估计偏差。加权估计量的目的就是调整这种弱平衡带来的偏差。

用 $1/\hat{p}(X_i)$ 做权重的一个缺点是权重之和不等于 1。如果将权重之和调整为 1，则对应的 $\hat{\tau}^{\text{ipw}}_{\text{ATE}}$ 可以通过加权回归求得。

Hirano, Imbens, & Ridder (2003). Efficient Estimation of Average Treatment Effects Using the Estimated Propensity Score. Econometrica, 71:4, 1161-1189.

更多参考文献

1. Morgan, S. L. & Winship, C. (2015).
   Counterfactuals and Causal Inference: Methods and Principles for Social Research, 2nd Edition. Cambridge University Press.

2. Pearl, J. (2009).
   Causality: Models, Reasonings, and Inference, 2nd Edition. Cambridge University Press.

3. Pearl, J., Glymour, M., & Jewell, N. P. (2016).
   Causal Inference in Statistics: A Primer. Wiley.

4. Cunningham, S. (2021).
   Causal Inference: The Mixtape. Yale University Press.
   https://mixtape.scunning.com/

5. Hernán, M. A. & Robins, J. M. (2020).
   Causal Inference: What If. CRC Press.
   https://www.hsph.harvard.edu/miguel-hernan/wp-content/uploads/sites/1268/2024/04/hernanrobins_WhatIf_26apr24.pdf

6. Huntington-Klein, N. (2022).
   The Effect: An Introduction to Research Design and Causality. CRC Press.
   https://theeffectbook.net/